جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

@jove_iut

www.jozve-iut.ir

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده فیزیک

فیزیک ۲

مدرس :

دکتر علی دادخواه

@jozve_iut

۱۳۹۴

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

@jozve_iut

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

به نام خدا

فیزیک ۲

استاد : علی دادخواه

« محمدعلی رستم پور »

« مهندسی عمران »

جلد سوم هالیدی (ویرایش ششم - ۲۰۰۱) و هدسون ؟

★ هدسون :

از فصل ۲۴ ← ۵ - ۹ - ۱۵ - ۲۰ - ۳۵ - ۲۷ - ۴۰ (قانون کولن و میدان الکتریکی)

از فصل ۲۵ ← ۳ - ۵ - ۷ - ۱۵ - ۲۰ (قانون گوس)

★ آزمون ها :

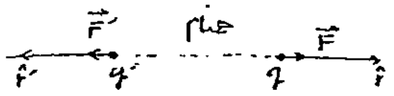
میان ترم ۱۷، ۱۲، ۱۳۸۸ (۳۵٪ نمره) (قانون کولن و میدان الکتریکی و قانون گوس)

کوئیز ۲، ۶، ۱۳۸۹ (۱۵٪ نمره) (پتانسیل الکتریکی و خازن)

پایان ترم ۱۷، ۴، ۱۳۸۹ (۵۰٪ نمره) (بقیه ی قسمت های درس)

@jozve_iut

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

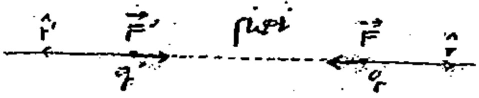


$\vec F' = -\vec F$

F' منفی اندازه‌ی بردار $= F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

$F' = F = k\frac{|q||q'|}{r^2}$ $\qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9$ M.K.S.C

$e = 1.6\times10^{-19}$ کولن



پس ⇒ $\vec F = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat r$; چون: $\hat r' = -\hat r$

درنتیجه ⇒ $\vec F' = k\frac{qq'}{r^2}\hat r' = -k\frac{qq'}{r^2}\hat r$

که با $\vec F' = -\vec F$ مطابقت دارد.

در اندازه از رابطه‌ی $F' = F = k\frac{qq'}{r^2}$ استفاده گردد:

(F' یعنی دافعه (یا $F>0$)

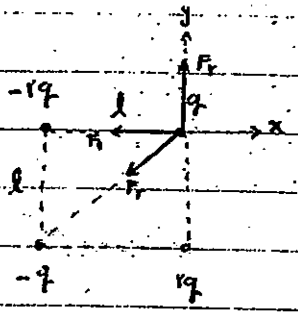
(F' یعنی جاذبه (یا $F<0$)

@jozve_iut

واین مثبت ومنفی نباید با جهت های مثبت و منفی محورها اشتباه شود.

اندازه‌ی هر بردار را جدا مشخص کرده و سپس با رابطه‌ی برداری صحیح را تشکیل می‌دهیم.

مثال ۱) نیروی وارد بر ذره‌ی q را محاسبه کنید:



$\hat r_1 = +\hat i \qquad \hat r_2 = +\hat j$

$\hat r_3 = \frac{\sqrt2}{2}\hat i + \frac{\sqrt2}{2}\hat j$

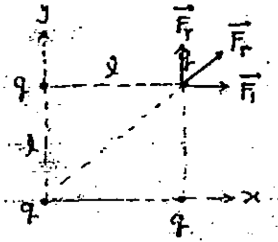
$\vec F_1 = k\frac{|-2q\cdot q|}{l^2}(-\hat i) = \frac{-2q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\hat i$, $\vec F_2 = \frac{|2q\cdot q|}{4\pi\varepsilon_0 l^2}(+\hat j) = \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\hat j$

$\vec F_3 = \frac{|q\cdot -q|}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt2 l)^2}(-\hat r_3) = \frac{-q^2}{8\pi\varepsilon_0 l^2}\left(\frac{\sqrt2}{2}\hat i + \frac{\sqrt2}{2}\hat j\right)$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

نیروی کل وارد بر q : $\vec{F}_q = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \longrightarrow \vec{F}_q = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\left((-2-\frac{\sqrt{2}}{2})\hat{i} + (2-\frac{\sqrt{2}}{2})\hat{j} \right)$

اندازه نیروی کل الکتریکی وارد بر q = $F_q = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\sqrt{(-2-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (2-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}$



محل مبداء مختصات هیچ تأثیری در جواب مسئله ندارد.

برای بررسی حالت مکعب، ابتدا یک وجه آن را در نظر می‌گیریم

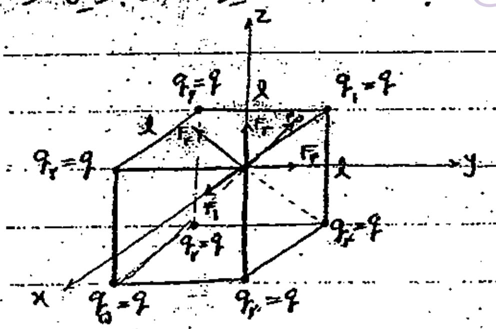
$\vec{F}_1 = k\frac{q^2}{l^2}\hat{i}$ $\quad \vec{F}_2 = k\frac{q^2}{l^2}\hat{j}$ $\quad \vec{F}_3 = k\frac{q^2}{(l\sqrt{2})^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}\right)$

نیروی وارد بر بار منطبق بر رأس بالای سمت راست = $\vec{F} = \sum_{i=1}^{3}\vec{F}_i$ $\quad \vec{F} = k\frac{q^2}{l^2}\left[(1+\frac{\sqrt{2}}{4})\hat{i} + (1+\frac{\sqrt{2}}{4})\hat{j}\right]$

چون جهت این نیرو منطبق بر نیمساز ربع اول است. $F = k\frac{q^2}{l^2}\sqrt{(1+\frac{\sqrt{2}}{4})^2 + (1+\frac{\sqrt{2}}{4})^2}$

@jozve_iut

۸ بار الکتریکی نقطه‌ای مشابه (هر کدام برابر q) روی ۸ رأس یک مکعب اند. اندازه نیروی وارد بر یکی از آن‌ها را پیدا کنید؟



$\vec{F}_1 = k\frac{q^2}{l^2}\hat{i}$ $\quad \vec{F}_4 = k\frac{q^2}{(l\sqrt{2})^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{k} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i}\right)$

$\vec{F}_2 = k\frac{q^2}{l^2}\hat{j}$ $\quad \vec{F}_5 = k\frac{q^2}{(l\sqrt{2})^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{k}\right)$

$\vec{F}_3 = k\frac{q^2}{l^2}\hat{k}$ $\quad \vec{F}_6 = k\frac{q^2}{(l\sqrt{2})}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}\right)$

قطر مکعب $= l\sqrt{3}$

$\vec{F}_7 = k\frac{q^2}{(l\sqrt{3})^2}\hat{r}_7 \qquad \hat{r} = ?$

چون قطر مکعب با سه یال مجاور خودش سه زاویه مساوی می‌سازد:
$\alpha = \beta = \gamma$
$\hat{r}_7 = \cos\alpha\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j} + \cos\gamma\,\hat{k}$

$\Rightarrow \hat{r}_7 = \cos\alpha(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) \quad \hat{r}_7\cdot\hat{r}_7 = 1\times1\times\cos(0) = 1$

$\Rightarrow 1 = \cos^2\alpha(1^2+1^2+1^2) = 3\cos^2\alpha \longrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \vec{F}_7 = k\frac{q^2}{(l\sqrt{3})^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$

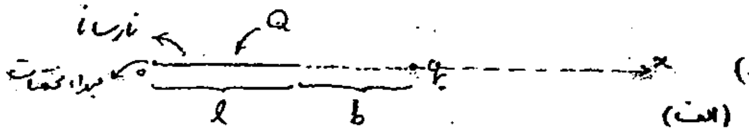
$\vec{F} = \sum_{i=1}^{7}\vec{F}_i \longrightarrow \vec{F}_7 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\left[(1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{9})(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})\right]$

که با سه محور سه زاویه مساوی می‌سازد $\vec{F}_7$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

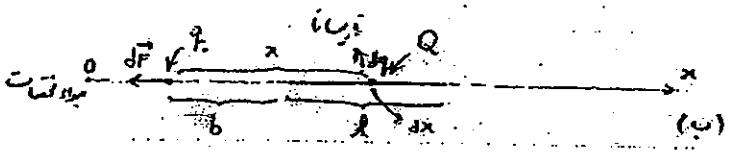
مثال) بار مثبت Q بطور یکنواخت روی طول l توزیع شده است. نیروی وارد بر بار نقطه‌ای مثبت q_0 در شکل زیر را پیدا کنید؟

(l و b و Q و q_0 و ε_0 معلوم‌اند)



(الف)

$$\lambda = \frac{Q}{l} = \text{بار واحد طول}$$



(ب)

مسئله را برای حالت (ب) حل می‌کنیم: $b \le x \le b+l$

$$dq = \lambda\, dx = \frac{Q}{l}\, dx$$

نیرویی که dq به q_0 وارد می‌کند $= d\vec F = -\hat i\, dF$ $\qquad d\vec F = -\hat i\, k\frac{(dq)q_0}{x^2}$

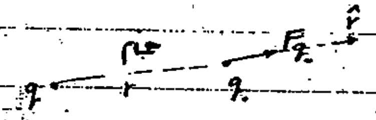
$\frac{Q}{l}dx$ حاصل به جای dq آمده است.

$$\vec F = -\hat i\, q_0 \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l}\int_b^{b+l}\frac{dx}{x^2} = -\hat i\, q_0 k \frac{Q}{l}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b+l}\right)$$

* میدان الکتریکی: وقتی بار الکتریکی نقطه‌ای q (بار آزمون) به تنهایی در نقطه‌ای از فضا باشد (و تا بی‌نهایت دور از آن بار دیگری نباشد) به آن نیرو وارد نمی‌شود.

@jozve_iut

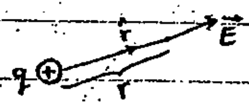
ولی وقتی بار نقطه‌ای دیگری (q_0) به آن نزدیک می‌شود، طبق قانون کولن نیرویی $\vec F = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat r$ به آن وارد می‌شود.



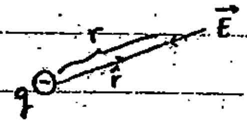
نتیجه می‌گیریم که بار q در اطراف خود خاصیتی که آن را میدان الکتریکی می‌نامیم وارد کرده است. و شدت این میدان را طبق تعریف از رابطه‌ی $\vec E = \frac{\vec F_{q_0}}{q_0}$: میدان حاصل از q " بدست می‌آید.

$$\vec E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat r$$

که اگر q مثبت باشد $\vec E$ و $\hat r$ هم‌جهت‌اند و اگر منفی باشد $\vec E$ در خلاف جهت $\hat r$ است.

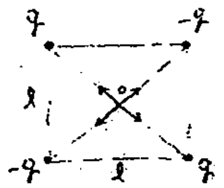


تذکر: $\hat r$ از q به سمت نقاط دور در نظر گرفته می‌شود.



@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

مثال) میدان در مرکز



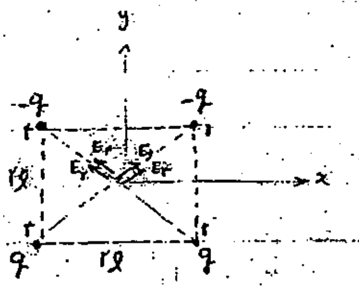
$$\vec{E}_o = \sum_{i=1}^{4} E_i = \vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3+\vec{E}_4 = \underbrace{(\vec{E}_1+\vec{E}_3)}_{0} + \underbrace{(\vec{E}_2+\vec{E}_4)}_{0} = 0$$

$\vec{E}_o = 0$

$\vec{E}_\infty = 0$

ولی سایر نقاط میدان مخالف صفر هستند.

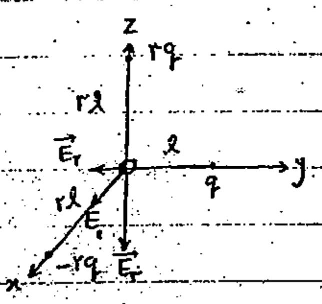
مثال: میدان در مرکز



$$\vec{E}_o = \sum_{i=1}^{4} \vec{E}_i = 4\times E_1 \cos 45^\circ (+\hat{j}) \qquad |-q| = q$$

میدان الکتریکی مرکز مربع $\vec{E}_o = \frac{4}{4\pi\epsilon_0}\times\frac{q}{(l\sqrt{2})^2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j} = \frac{q}{\pi\epsilon_0 l^2}\times\frac{\sqrt{2}}{4}\hat{j}$

مثال) در حالت سه بعدی و در مبدأ مختصات



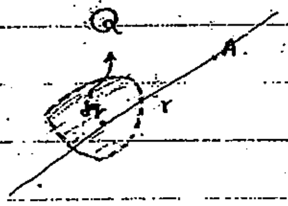
$$\vec{E}_1 = \frac{|-2q|}{4\pi\epsilon_0 (2l)^2}(+\hat{i}) = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 \times 4l^2}\hat{i}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 l^2}(-\hat{j}) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 l^2}\hat{j}$$

$$\vec{E}_3 = \frac{|3q|}{4\pi\epsilon_0 (3l)^2}(-\hat{k}) = \frac{-q}{12\pi\epsilon_0 l^2}\hat{k}$$

@jozve_iut

* محاسبه‌ی میدان بارهای پیوسته‌ای که روی یک طول یا روی یک سطح یا درون حجم توزیع شده‌اند:



← در حالت پیوسته $\sum$ (برداری) به $\int$ (برداری) تبدیل می‌شود.

هر انتگرال برداری در حالت کلی سه بعدی معادل با سه انتگرال اسکالر است.

یعنی در حالت کلی حتماً باید سه انتگرال جدا حساب شود. یکی برای پیدا کردن E_x، یکی برای پیدا کردن E_y و دیگری هم برای E_z می‌باشد و سپس:

$\vec{E}_A = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}$ و $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$

* طبق میدان بار نقطه‌ای برای $d\vec{E}$ حاصل از dq در نقطه‌ی A داریم:

$$d\vec{E}_A = d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

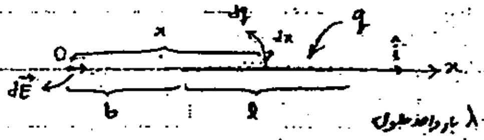
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$\vec{E}_P = \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\text{کل بار}} \frac{dq}{r^2}\hat{r} \quad , \quad \vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k} = k\int \frac{dq}{r^2}(\cos\alpha\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j} + \cos\gamma\,\hat{k})$$

$$\Rightarrow \quad E_x = k\int_{\text{کل بار}} \frac{dq}{r^2}\cos\alpha \qquad E_y = k\int_{\text{کل بار}} \frac{dq}{r^2}\cos\beta \qquad E_z = k\int_{\text{کل بار}} \frac{dq}{r^2}\cos\gamma$$

r و α ، β و γ در حالت کلی متغیر هستند.

مثال) بار منفی q روی طول l یکنواخت به صورت زیر توزیع شده است. میدان الکتریکی نقطه‌ی O را پیدا کنید؟
منفی: $-q$



اندازه $dE = \frac{k|dq|}{x^2} = -\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = -\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$

λ بار واحد طول ... $dq = \lambda dx$ و $\lambda = \frac{q}{l}$ (چون یکنواخت است)

$$dq = \frac{q}{l}dx \qquad d\vec{E} = \hat{i}\,dE = \hat{i}\left(-\frac{\frac{q}{l}dx}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\right) \quad , \quad \vec{E} = \int_{\text{کل بار}} d\vec{E} = \frac{-\hat{i}q}{4\pi\varepsilon_0 l}\int_b^{b+l}\frac{dx}{x^2}$$

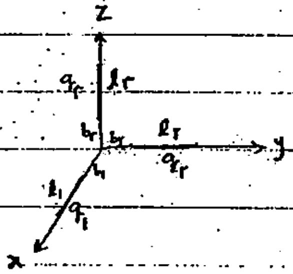
برآیند کلیه‌ی dE ها

$$\Rightarrow \vec{E} = -\hat{i}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b+l}\right) \rightarrow \vec{E}_O = -\hat{i}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b(b+l)}$$

$q>0$: جهت به طرف راست

توجه: جواب این مسئله هم برای بار مثبت درست است هم منفی.

مثال) برآیند میدان در نقطه‌ی O (مرکز مختصات) کدام است؟



حل: از مثال قبلی استفاده می‌کنیم یعنی $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ و $\vec{E}_3$ در نقطه‌ی O را تشکیل داده و برآیند می‌گیریم.

$$\vec{E}_O = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\hat{i}\frac{q_1}{b_1(b_1+l_1)} + \hat{j}\frac{q_2}{b_2(b_2+l_2)} + \hat{k}\frac{q_3}{b_3(b_3+l_3)}\right]$$

۳) شبه فرمول اصلی برای امتحان میان ترم «

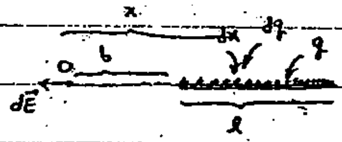
$$\vec{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\text{کل بار}}\frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

$$\varepsilon_0\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = q_{\text{داخل}}$$

مثال) اگر بار مثبت q بطور غیر یکنواخت و با تابع توزیع $\lambda = \alpha x$ روی طول l پخش شده باشد (به شکل زیر):

(الف) الف) پارامتر ثابت α را پیدا کنید؟

ب) میدان الکتریکی نقطه‌ی O را بدست آورید؟



(الف) بار جزئی در فاصله x از مبدأ $= dq = \lambda dx = \alpha x\,dx$

$$\text{بار کل} = q = \int_{\substack{\text{کل بار}\\(\text{جمع } dq \text{ ها})}} dq = \alpha\int_b^{b+l} x\,dx = \tfrac{1}{2}\alpha\left((b+l)^2 - b^2\right) = \tfrac{1}{2}\alpha(l^2 + 2lb) \rightarrow \alpha = \frac{2q}{(l^2+2lb)}$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

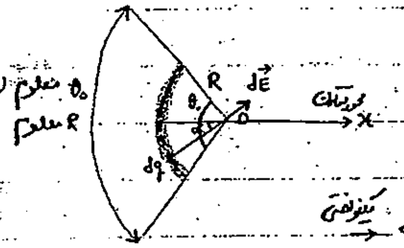
در حالتی که $b=0$ باشد: $\alpha = \frac{2q}{\ell^2}$

ب) $-\hat{i}(dE) = -\hat{i}\frac{dq}{4\pi\epsilon_0 x^2} = -\hat{i}\frac{\alpha x\,dx}{4\pi\epsilon_0 x^2} \rightarrow \vec{E}_0 = \frac{-\hat{i}\alpha}{4\pi\epsilon_0}\int_b^{b+\ell}\frac{dx}{x}$ = میدان حاصل از dq در O (به سمت چپ، اندازه، مثبت)

$$\Rightarrow \vec{E}_0 = -\frac{\hat{i}\alpha}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{b+\ell}{\ell}\right) = -\frac{\hat{i}}{4\pi\epsilon_0}\times\frac{2q}{\ell(\ell+2b)}\ln\left(\frac{b+\ell}{\ell}\right)$$

اندازه این میدان نسبت به حالت توزیع یکنواخت کوچکتر است.

مثال) فرض کنید بار مثبت q به طور یکنواخت روی کمان زیر توزیع شده است. میدان مرکز انحنای کمان را پیدا کنید؟



$-\frac{\theta_0}{2} \le \alpha \le \frac{\theta_0}{2}$

$dE = \frac{|dq|}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ (بار مثبت) و $dE_x = dE\cos\alpha = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2}\cos\alpha$

$dq = $ (بار واحد زاویه) $d\alpha$

یکنواخت: $dq = \frac{q}{\theta_0}d\alpha$

$$E_x = \int_{\text{کمان}} dE_x = \int_{\text{کمان}} dE\cos\alpha \rightarrow E_x = \frac{q}{\theta_0}\times\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2}\int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2}\cos\alpha\,d\alpha = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\theta_0 R^2}\left(\sin\alpha\Big|_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2}\right)$$

$$\rightarrow E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\theta_0 R^2}\left(\sin\frac{\theta_0}{2} - \sin\left(-\frac{\theta_0}{2}\right)\right)$$

@jozve_iut

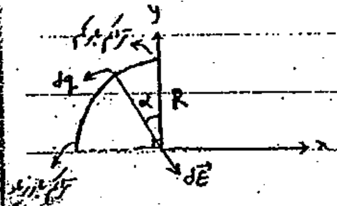
و چون $E_y = 0$ است (به دلیل تقارن در توزیع یکنواخت): $\vec{E}_0 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\theta_0 R^2}\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right)\hat{i}$

در راستای محور y (اثبات): $dE_y = dE\cos\beta = dE\sin\alpha$ ؛ $(\alpha+\beta = \frac{\pi}{2})$ ؛ $E_y = \int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2} dE\sin\alpha = (\text{ضریب})\int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2}\sin\alpha\,d\alpha =$

$$(\text{ضریب})(-\cos\alpha)\Big|_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2} = (\text{ضریب})\underbrace{\left[-\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\theta_0}{2}\right)\right]}_{\text{صفر}} = 0 \rightarrow E_y = 0$$

نیازی به این اثبات نیست و دلیل آن تقارن کمان است.

مثال) اگر بار مثبت q به طور غیر یکنواخت با تابع توزیع $\gamma\sin\alpha = $ (بار واحد زاویه) روی کمان پخش شده است.



$0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} = \theta_0$

$$q = \int_0^{\pi/2} dq = \int_0^{\pi/2}(\text{بار واحد زاویه})(\text{زاویه جزء}) \rightarrow q = \int_0^{\pi/2}(\gamma\sin\alpha)\,d\alpha \Rightarrow q = \gamma(-\cos\alpha)\Big|_0^{\pi/2} \Rightarrow$$

$q = -\gamma\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \gamma \Rightarrow$ بار واحد زاویه: $\lambda_\theta = q\sin\alpha$

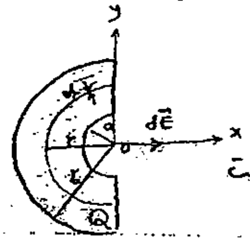
$dE_x = dE\sin\alpha$ (به سمت راست) ؛ $dE = \frac{|dq|}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\lambda_\theta\,d\alpha}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{q\sin\alpha\,d\alpha}{4\pi\epsilon_0 R^2}$

$dE_y = dE\cos\alpha$ (به سمت چپ) ؛ $E_x = \int_0^{\pi/2} dE_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\int_0^{\pi/2}\sin^2\alpha\,d\alpha = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\,d\alpha =$

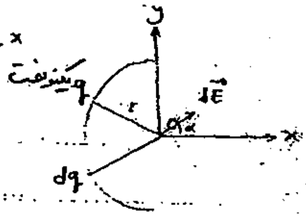
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$dE_y = \dots = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\int^{\pi/2} \underbrace{\sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha}_{d(\sin\alpha)} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\times \frac{1}{2}\times \sin^2\alpha\Big|^{\pi/2} = \dots$$

$$\vec E = \underbrace{E_x \hat i}_{\text{مثبت}} + \underbrace{E_y \hat j}_{\text{منفی}} \qquad E=\sqrt{E_x^2+E_y^2} \neq \int^{\pi/2} \frac{\lambda_0\, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \rightarrow$$ هیچ مفهوم فیزیکی ندارد



مثال) بار مثبت Q روی سطح زیر به طور یکنواخت توزیع شده است. میدان الکتریکی را برای نقطه‌ی O بدست آورید؟



حل:

۱ـ x محور تقارن است چون توزیع یکنواخت است: $E_y = 0$

$$E_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dE_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha \quad \left(\text{یکنواخت}: dq=\frac{q}{\pi}d\alpha\right) = \frac{q}{\pi}\times\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{1}{r^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha\, d\alpha \longrightarrow$$

$$E_x = 2\times\frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0 r^2}\left(\sin\alpha\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 r^2}$$

پس برای مرکز نیم حلقه‌ی فوق داریم: $\vec E = \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 r^2}\hat i + 0$ (*)

سطح نوار فرضی $= dS =$ عرض × طول $= \pi r\times dr$

بار نوار فرضی $= dq =$ سطح × بار واحد سطح $= \sigma\times dS$

λ بار واحد طول — σ بار واحد سطح — ρ بار واحد حجم

سطح کلی که بار Q روی آن توزیع شده است $= \frac{1}{2}\pi b^2 - \frac{1}{2}\pi a^2 = \frac{1}{2}\pi(b^2-a^2)$

و چون بار Q یکنواخت توزیع شده است: $\sigma = \frac{Q}{\frac{1}{2}\pi(b^2-a^2)} = \frac{2Q}{\pi(b^2-a^2)}$

① ⇒ بار نوار فرضی $= dq = \sigma\times dS = \frac{2Q}{\pi(b^2-a^2)}\times \pi r\times dr$

② جایگذاری در رابطه (*) به جای q باید نوشت dq:

$$d\vec E_0 = \frac{dq}{2\pi^2\varepsilon_0 r^2}\hat i \Rightarrow d\vec E_0 = \frac{1}{2\pi^2\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{2Q\times r\times dr}{(b^2-a^2)}\right)\hat i = \frac{Q\, dr}{\pi^2\varepsilon_0(b^2-a^2)\, r}\hat i$$

از r=a تا r=b بی‌نهایت حلقه وجود دارد

$$\vec E_0 = \int_{r=a}^{r=b} d\vec E_0 = \frac{Q}{\pi^2\varepsilon_0(b^2-a^2)}\hat i\int_a^b\frac{dr}{r} = \frac{Q}{\pi^2\varepsilon_0(b^2-a^2)}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\hat i$$

برآیند $d\vec E$ ها

تمرین) فرض کنید در مسئله‌ی فوق: $\sigma = \lambda r$ باشد (توزیع غیر یکنواخت)

الف) λ را برحسب Q و a و b پیدا کنید؟

ب) میدان نقطه‌ی O (مبداء مختصات) را بدست آورید.

@jozve_iut

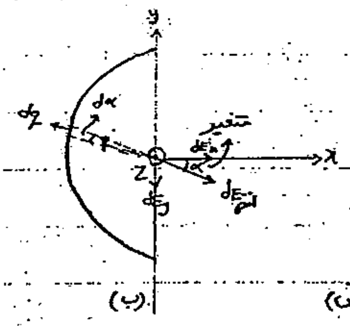
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

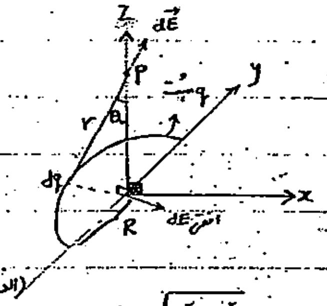
الف) در قسمت ① داریم: $dq = \sigma \times ds = \lambda r \times \pi r\, dr = \pi \lambda r^2 dr$

$$Q = \int_{\text{کل بار}} dq = \pi\lambda \int_a^b r^2 dr = \lambda \pi \times \tfrac{1}{3}(b^3 - a^3) \rightarrow \lambda = \frac{3Q}{\pi(b^3-a^3)}$$

ب) در قسمت ② داریم: $d\vec{E}_0 = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{i} \rightarrow d\vec{E}_0 = \dfrac{\pi\lambda r^2 dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{i} = \dfrac{\lambda\, dr}{4\varepsilon_0}\hat{i} = \dfrac{3Q}{\pi(b^3-a^3)} \times \dfrac{dr}{4\varepsilon_0}\hat{i}$

$$\vec{E}_0 = \int_a^b dE_0 = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0(b^3-a^3)}\hat{i}\int_a^b dr = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0(b^3-a^3)}(b-a)\hat{i}$$





مثال) با توجه به دو شکل بالا (بار یکنواخت)

این بار مقدار میدان را در نقطه‌ی P بر روی محور z ها محاسبه کنید؟ (z ثابت و صفحه‌ی xy افقی)

با توجه به شکل الف

$$r = \sqrt{R^2 + z_p^2} \quad , \quad dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+z_p^2)}$$

$\cos\theta = \dfrac{z_p}{\sqrt{z_p^2+R^2}}$ برای تمامی dq ها $\quad dE_z = dE\cos\theta = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \times \dfrac{z_p}{(R^2+z_p^2)^{3/2}}$

$$\Rightarrow E_z = \int_{\text{کل بار}} dE_z = \frac{z_p}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+z_p^2)^{3/2}}\int_{\text{کل بار}} dq \Rightarrow E_z = \frac{q\, z_p}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+z_p^2)^{3/2}}$$

$d\vec{E}$ اندازه‌ی مولفه‌ی افقی $= dE_{\text{افقی}} = dE\sin\theta \quad , \quad dE_{\text{افقی}} = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z_p^2)} \times \dfrac{R}{\sqrt{R^2+z_p^2}}$

با نگاه از بالا به سمت پایین (شکل ب)

$-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ داریم: $dE_x = dE_{\text{افقی}}\cos\alpha \quad , \quad dE_y = dE_{\text{افقی}}\sin\alpha$

چون محور x محور تقارن توزیع بار است و هم چنین توزیع بار یکنواخت می‌باشد، در این صورت $E_y = 0$

$$E_x = \int_{\text{کل بار}} dE_{\text{افقی}}\cos\alpha = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z_p^2)} \times \frac{R}{\sqrt{R^2+z_p^2}}\cos\alpha = \frac{R}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z_p^2)^{3/2}} \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha\, dq \quad ⊛$$

$d\alpha$ بر روی زاویه‌ی کوچک: $dq =$ بار واحد زاویه $\times\, d\alpha \xrightarrow{\text{یکنواخت}} dq = \dfrac{q}{\pi} \times d\alpha$

و چون $\frac{q}{\pi}$ ثابت است، از زیر انتگرال خارج می‌شود:

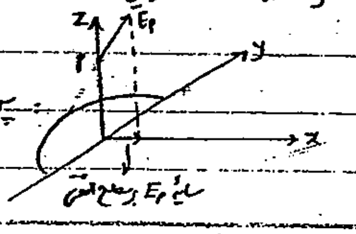
$$⊛: E_x = \frac{Rq}{4\pi^2\varepsilon_0(R^2+z_p^2)^{3/2}} \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{Rq}{4\pi^2\varepsilon_0(R^2+z_p^2)^{3/2}}\Big(\underbrace{\sin(\tfrac{\pi}{2})}_{1} - \underbrace{\sin(-\tfrac{\pi}{2})}_{-1}\Big)$$

$$\Rightarrow E_x = \frac{Rq}{2\pi^2\varepsilon_0(R^2+z_p^2)^{3/2}}$$

و چون می‌دانیم که: $\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y + \vec{E}_z$ در این صورت:

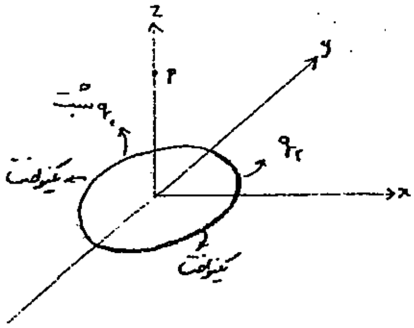
$$\vec{E}_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z_p^2)^{3/2}}\left(\frac{2R}{\pi}\hat{i} + 0 + z_p\hat{k}\right)$$

پس:



@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

مثال ۴) در این مسئله، بار در حلقه‌ی نیمه سمت راست یکنواخت و متراکم و در نیم حلقه‌ی سمت چپ یکنواخت و نیمه متراکم است. میدان در نقطه‌ی P کدام است؟

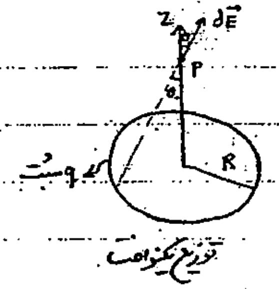


$$\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 (R^2+z_P^2)^{3/2}} \left(\frac{2R}{\pi}(q_1-q_2)\hat{i} + z_P (q_1+q_2)\hat{k} \right)$$

اگر در مسائل فوق $q_1 = q_2$ باشد و فرض شود $q_1 + q_2 = q$ = بار کل حلقه آنگاه:

$$\vec{E}_P = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}$$

که اثبات آن بسیار ساده است!



$$dE_z = dE\cos\theta = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}\times\frac{z}{r} = \frac{(dq)\,z}{4\pi\epsilon_0 (z^2+R^2)^{3/2}}$$

$$E_z = \int_{\text{کل بار}} dE_z = \frac{z}{4\pi\epsilon_0 (z^2+R^2)^{3/2}}\int_{\text{کل بار}} dq = \frac{zq}{4\pi\epsilon_0 (z^2+R^2)^{3/2}}$$

و چون P روی محور تقارن دایره و توزیع بار یکنواخت است؛ مؤلفه‌های افقی هم دیگر را خنثی می‌کنند.

پس: $\vec{E}_P = \frac{zq}{4\pi\epsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}$ $\quad d\vec{E}_\perp = 0$

که هم برای $q>0$ و هم $q<0$ این رابطه صحیح است. هم چنین نقطه‌ی P چه در $z>0$ و چه در $z<0$ باشد جواب صحیح خواهد بود.

با بدست آوردن $\vec{E}$ از رابطه‌ی $\vec{E} = \frac{\vec{F}_q}{q}$ آنگاه: $\vec{F}_q = q\vec{E}$ نیروی وارد بر بار نقطه‌ای q

$\vec{F}_e = -e\vec{E}$ ⇐ نیروی وارد بر یک الکترون که در نقطه‌ای با میدان $\vec{E}$ قرار می‌گیرد.

لذا اگر الکترون در یک نقطه به فاصله‌ی z از مرکز دایره‌ای به شعاع R و با توزیع یکنواخت بار مثبت قرار گیرد به آن نیروی $\vec{F}_e = -e\frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}$ وارد می‌شود.

چون ضریب $\hat{k}$ منفی است نیروی $\vec{F}_e$ به سمت نقطه‌ی O خواهد بود و لذا باعث نوسان الکترون می‌شود.

* پریود نوسانات الکترون را برای حالت $z \ll R$ بدست آورید؟ (پریود = تناوب T)

$z \ll R \rightarrow z^2+R^2 \simeq R^2$

$\vec{F}_e \simeq -\underbrace{\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 R^3}}_{\text{ثابت}}\vec{z}$ ، $\vec{z} = z\hat{k}$ که

این نیرو شبیه نیروی $\vec{F} = -k\vec{x}$ خواهد بود. یعنی مثل جسم متصل به فنر یک حرکت نوسانی ساده دارد.

نیروی وزن در مقابل نیروی $\vec{F}_e$ بسیار ناچیز است: $\vec{F}_e = F_{\text{کل}} = -\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 R^3}\vec{z}$ = نیروی کل

قانون دوم نیوتن) $m_e\vec{a} = -\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 R^3}\vec{z}$ $\quad$ چون: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{z}}{dt}\right) \Rightarrow \vec{a} = \frac{d^2\vec{z}}{dt^2}$

$$\Rightarrow \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{eq}{4\pi\epsilon_0 R^3 m_e}z = 0$$

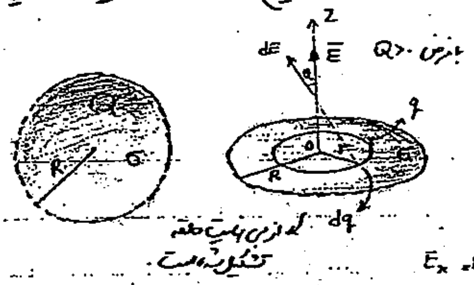
در این معادله جواب $z = z_0\cos\omega t$ صدق می‌کند که در آن $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\quad (z \ll R)$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$\vec v = \frac{dz}{dt} = -\omega z_0 \sin\omega t$, $\vec a = \frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 z_0 \cos\omega t$

$$-\omega^2 z_0\cos\omega t + \frac{eqz_0}{4\pi\varepsilon_0 R^3 m_e}\cos\omega t = 0 \to \omega^2 = \frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 R^3 m_e}$$

مثال) بار Q به طور یکنواخت روی سطح دیسک نارسانایی که شعاع آن R است توزیع شده است. میدان الکتریکی نقطه‌ای روی محور تقارن دیسک را پیدا کنید؟



به دلیل یکنواختی توزیع بار: $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$

$$\vec E = \int_{r=0}^{R} d\vec E$$

الف) با استفاده از میدان یک حلقه با توزیع خطی:

به دلیل تقارن توزیع یکنواخت $\vec E_\perp = 0 \leftarrow E_x = E_y = 0$

$$E_z = \int dE_z = \int dE\cos\theta = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+z^2)} \times \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{z}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+z^2)^{3/2}} \int dq = \frac{zq}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+z^2)^{3/2}}$$

در شکل فوق بار حلقه‌ی فرضی: $dq = \sigma \times dS = \sigma \times 2\pi r\, dr$

که طبق مسأله‌ی حلقه برای یک حلقه داریم: $dE_z = \frac{z\,dq}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{z(\sigma \times 2\pi r\, dr)}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+z^2)^{3/2}}$ اندازه میدان حاصل از حلقه روی محور تقارن

$$E_z = \int_{r=0}^{r=R} dE_z = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\int_0^R (r^2+z^2)^{-3/2} r\,dr = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{(r^2+z^2)^{-1/2}}{-1}\right)\Big|_0^R$$

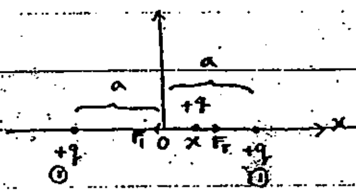
$$\Rightarrow E_z = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) \Rightarrow \vec E = E_z \hat k = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\hat k$$

$$\vec E_{z>0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\hat k \quad , \quad \vec E_{z<0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(-1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\hat k$$

اگر $R=\infty$ باشد، برای z های محدود: $\vec E_{بالا} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat k$, $\vec E_{پایین} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat k$

مثال) دو بار q_1 و q_2 در جای خود ثابت هستند. ω را بدست آورید؟

(الف)



$$\vec F = \vec F_1 + \vec F_2 = -\hat i \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (a-x)^2} + \hat i \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (a+x)^2} \Rightarrow m\vec a = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(a+x)^2} - \frac{1}{(a-x)^2}\right)\hat i$$

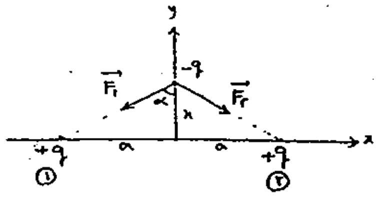
$$\Rightarrow m\vec a = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-4ax}{(a^2-x^2)^2}\right)\hat i = m\frac{d^2\vec x}{dt^2}$$

برای $x \ll a$ داریم: $a^2 - x^2 \simeq a^2$

$$\Rightarrow \frac{d^2\vec x}{dt^2} + \frac{q^2 \vec x}{\pi\varepsilon_0 a^3 m} = 0$$

که در آن جواب $\vec x = \vec x_0 \cos\omega t$ را صدق می‌کند: $\frac{2\pi}{T} = \omega = \sqrt{\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 a^3 m}}$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان



$F_1 = F_2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (a^2+x^2)} \Rightarrow \vec F_{y} = (F_1\cos\alpha + F_2\cos\alpha)(-\hat j)$

$m\vec a = \vec F_y = 2\times \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(a^2+x^2)} \times \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}(-\hat j)$

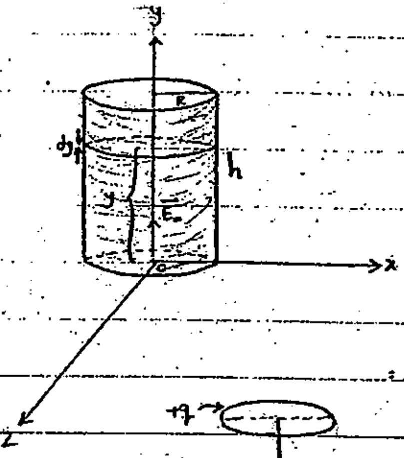
در حالت خاص $y \ll a$ خواهیم داشت: $a^2+y^2 \approx a^2$:

$$\frac{d^2 \vec y}{dt^2} + \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 a^3 m}\vec y = 0$$

$$\frac{2\pi}{T} = \omega = \sqrt{\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 a^3 m}}$$

که در آن $\vec y = \vec y_0 \cos\omega t$ صدق می‌کند

مثال) فرض کنید بار Q- روی سطح استوانه بطور یکنواخت توزیع شده باشد (در حجم آن باری وجود ندارد) میدان الکتریکی را برای O پیدا کنید؟ (استوانه غیر رسانا)



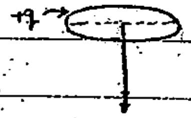
دو یکنواخت: بار واحد سطح $= \sigma = \frac{Q}{2\pi R h}$

$\vec E = E_0(\hat j)$ و $0 < y \le h$

بار حلقه فرضی: $dq = \sigma \times ds = \frac{Q}{2\pi R h} \times 2\pi R\, dy$

$\to dq = \frac{Q}{h} dy =$ (بار واحد طول استوانه) dy

با توجه به مسئلهٔ حلقه که قبلاً حل شد، هر حلقه‌ای دارای بار q بطور یکنواخت توزیع شده باشد:



$E = \frac{|q y|}{4\pi\epsilon_0 (R^2+y^2)^{3/2}}$

برای dq داریم: $(\frac{Q}{h}dy) =$ فرض

اندازه $\leftarrow dE_0 = \frac{|dq\, y|}{4\pi\epsilon_0(R^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y(\frac{Q}{h})dy}{4\pi\epsilon_0(R^2+y^2)^{3/2}}$

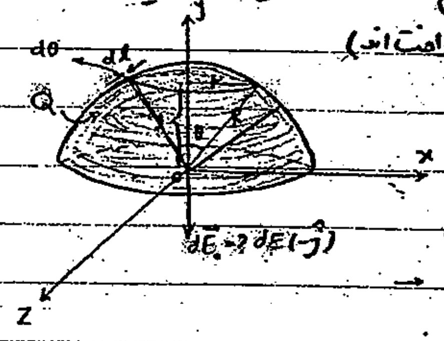
چون همهٔ dE ها هم جهت هستند مستقیماً انتگرال می‌گیریم:

$$E_0 = \int_{y=0}^{y=h} dE_0 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 h}\int_0^h (R^2+y^2)^{-3/2} y\,dy = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 h}\left(\frac{(R^2+y^2)^{-1/2}}{-1}\Big|_0^h\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 h}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}} - \frac{1}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \vec E_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 h}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}} - \frac{1}{R}\right)(+\hat j)$$

به این جواب هم برای $Q>0$ و هم برای $Q<0$ صحیح است.

مثال) بار مثبت Q روی سطح خمیده یک نیم‌کره نارسانا به شعاع R توزیع شده است. میدان الکتریکی را در مرکز انحنای آن بدست آورید؟ (در حجم آن باری وجود ندارد) (بارها بطور یکنواخت اند)



$dE_0 = ?\, dE(-\hat j)$

به دلیل توزیع یکنواخت: بار واحد سطح $= \sigma = \frac{Q}{2\pi R^2}$

سطح نوار فرضی $= ds = 2\pi r \times dl$ ، بار نوار فرضی $= dq = \sigma ds = \frac{Q}{2\pi R^2}\times 2\pi r\, dl$

$$\to dq = \frac{Q r}{R^2} dl$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

الان: میدان این dq (حلقه) در نقطه‌ی O طبق مسئله‌ی حلقه به صورت: (O روی محور تقارن) داریم: $d\vec{E} = dE(-\hat{j})$

$$dE = \frac{(dq)y}{4\pi\epsilon_0 (y^2+r^2)^{3/2}} = \frac{(\frac{Q}{R^2} r\,dl)y}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

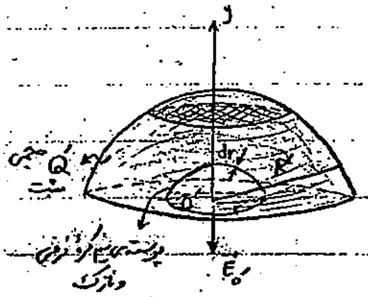
چون همه‌ی $d\vec{E}$ ها هم‌جهت‌اند:

$$E = \int_{\text{کل سطح نیم‌کره}} dE = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^5}\int_{\text{کل سطح نیم‌کره}} ry\,dl \quad , \quad r = R\sin\theta \quad , \quad y = R\cos\theta \quad , \quad dl = R\,d\theta$$

$$\Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^5} \times R^3 \int_0^{\pi/2} \sin\theta \underbrace{\cos\theta\, d\theta}_{d(\sin\theta)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \times \left(\frac{1}{2}\sin^2\theta \Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2}(1-0) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$\Rightarrow E_0 = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2}\hat{j}$$

مثال) بار مثبت Q' در داخل حجم نیم‌کره‌ی نارسانای زیر به طور یکنواخت توزیع شده است. میدان الکتریکی $\vec{E}_0$ را پیدا کنید؟ (شعاع R')



روش اول) حجم پوسته‌ی نازک بین r و r+dr: dv = مساحت سطح جانبی نیم‌کره × ضخامت

$$\Rightarrow dv = 2\pi r^2 \times dr$$

(یکنواخت) $\rho = \text{بار واحد حجم} = \frac{Q'}{\frac{2}{3}\pi R'^3} = \frac{3Q'}{2\pi R'^3}$

بار واحد حجم بین r و r+dr: $dq = \rho\, dv = \frac{3Q'}{2\pi R'^3} \times 2\pi r^2 \times dr = \frac{3Q'}{R'^3} \times r^2 dr$

که طبق مسئله‌ی قبل: بردار میدان حاصل از این dq در مرکز، از رابطه‌ی $d\vec{E}_0 = \frac{dq}{8\pi\epsilon_0 r^2}(-\hat{j})$

$$\Rightarrow \vec{E}_0 = -\frac{\hat{j}}{8\pi\epsilon_0} \times \frac{3Q'}{R'^3}\int_{r=0}^{r=R'} \frac{1}{r^2}(r^2 dr) = -\frac{\hat{j}}{8\pi\epsilon_0} \times \frac{3Q'}{R'^3}(R'-0) = -\frac{\hat{j}}{8\pi\epsilon_0} \times \frac{3Q'}{R'^2}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_0 = -\frac{3Q'}{8\pi\epsilon_0 R'^2}(+\hat{j})$$

همان طور که دیده می‌شود مقدار این میدان سه برابر میدان سوال قبلی است.

مثال) در مسئله‌ی فوق اگر بار Q' در حجم نیم‌کره‌ای به شعاع R' به صورت غیر یکنواخت و به گونه‌ای که ρ متناسب با r باشد توزیع شده باشد، مجدداً مسأله را حل کنید؟

$$\rho \propto r \Rightarrow \rho = \lambda r \Rightarrow Q' = \int_{r=0}^{r=R'} \rho\, dv = \int_0^{R'} (\lambda r)(2\pi r^2 dr) = 2\pi\lambda \int_0^{R'} r^3 dr = 2\pi\lambda \times \frac{1}{4}(R'^4 - 0)$$

$$\Rightarrow Q' = \left(\frac{\pi}{2}R'^4\right)\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2Q'}{\pi R'^4} \Rightarrow \rho = \lambda r = \frac{2Q'}{\pi R'^4} r$$

بار المان حجم dv: $dq = \rho\, dv = \frac{2Q'}{\pi R'^4} r \times (2\pi r^2 dr) \Rightarrow dq = \frac{4Q'}{R'^4} r^3 dr$

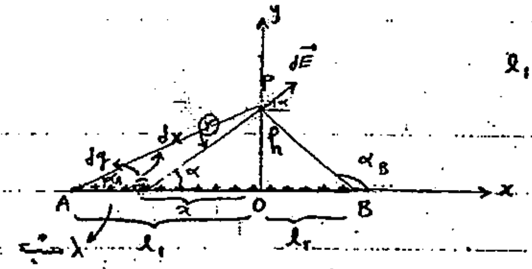
که طبق رابطه‌ی $\vec{E}_0 = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2}\hat{j}$ مسئله‌ی پوسته‌ی نیم‌کره داریم:

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

میدان حاصل از dq این قرص $= d\vec{E}_0 = -\dfrac{dq}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{j} = -\dfrac{\frac{4Q'}{R'^4}r^3 dr}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{j} \Rightarrow \vec{E}_0 = \int_{r=0}^{r=R'} d\vec{E}_0 = -\hat{j}\dfrac{Q'}{2\pi\varepsilon_0 R'^4}\int_0^{R'} r\,dr$

$$\Rightarrow \vec{E}_0 = -\hat{j}\,\frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 R'^2}\hat{j}$$

مثال) بار مثبت با چگالی طولی ثابت (یکنواخت) λ روی طول زیر توزیع شده است. میدان نقطه P را پیدا کنید؟



$\ell_1 + \ell_2 = \ell$: کل طول توزیع بار ، $(\ell_1 \neq \ell_2)$

قرارداد $dx>0$. زیرا از xهای کوچک به بزرگ می‌رویم.

dx بار طول کوچک: $dq = \lambda\, dx$

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \underbrace{\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}}_{\text{ثابت}} \times \frac{dx}{r^2}$$

(خصوصی از A تا B)

$$\Rightarrow E_x = \int_{\text{کل بار}} dE_x = \int_{Ⓐ}^{Ⓑ} dE\cos\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{Ⓐ}^{Ⓑ}\frac{dx}{r^2}\cos\alpha$$

$$\Rightarrow E_y = \int_{\text{کل بار}} dE_y = \int_{Ⓐ}^{Ⓑ} dE\sin\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{Ⓐ}^{Ⓑ}\frac{dx}{r^2}\sin\alpha$$

چون $d\vec{E}$ها همه درون صفحه xy هستند مولفه z ندارند $\Leftarrow E_z = 0$

حل مسئله به این شکل ممکن نیست زیرا در این مسائل هم dx ، r^2 را برحسب α ، $d\alpha$ بدست می‌آوریم

در O: $r\sin\alpha = h \rightarrow r = \dfrac{h}{\sin\alpha}$ ، $\cot\alpha = \dfrac{|x|}{h} = \dfrac{-x}{h}$ (منفی) ، $x = -h\cot\alpha$

$$\Rightarrow dx = -h(-(1+\cot^2\alpha)\,d\alpha) \rightarrow dx = \frac{h}{\sin^2\alpha}d\alpha$$

$$\Rightarrow E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{1}{h}\int_{\alpha_A}^{\alpha_B}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 h}(\sin\alpha_B - \sin\alpha_A)$$

$$\Rightarrow E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{1}{h}\int_{\alpha_A}^{\alpha_B}\sin\alpha\, d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 h}(\cos\alpha_A - \cos\alpha_B)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 h}\left[(\sin\alpha_B - \sin\alpha_A)\hat{i} + (\cos\alpha_A - \cos\alpha_B)\hat{j}\right] = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 h}\left[\left(\frac{h}{\sqrt{h^2+\ell_2^2}} - \frac{h}{\sqrt{h^2+\ell_1^2}}\right)\hat{i} + \left(\frac{\ell_1}{\sqrt{h^2+\ell_1^2}} + \frac{\ell_2}{\sqrt{h^2+\ell_2^2}}\right)\hat{j}\right]$$

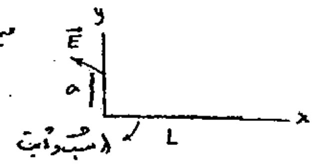
① اگر P روی عمود منصف باشد یعنی $\ell_1 = \ell_2$: $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h} \times \dfrac{\ell_1}{\sqrt{h^2+\ell_1^2}}\hat{j}$

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

② در مسأله ۲۵ هرلیسون (فصل ۲۴) که برای آن $l_1=0$ ، $l_2=L$ ، $h=a$

$$\vec E=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}\left[\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+L^2}}-1\right)\hat i+\frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}}\hat j\right]$$

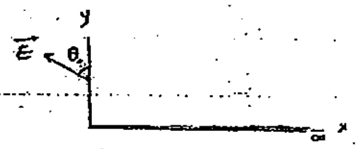
میدان مثبت



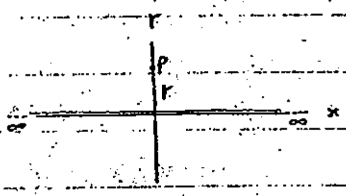
③ در کتاب هالیدی $l_1=0$ و $l_2=L=\infty$

$$\lim_{L\to\infty}\frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}}=1 \Rightarrow \vec E=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 h}(-\hat i+\hat j)$$

$$\to tg\,\theta=\left|\frac{E_y}{E_x}\right|=1 \to \theta=45^\circ$$



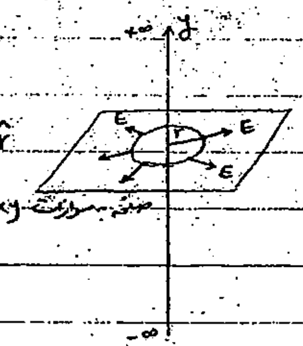
④ برای حالتی که $l_1=l_2=\infty$



$\alpha_A=0$ و $\alpha_B=\pi$

$$E_x=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r}\int_0^{\pi}\cos\alpha\,d\alpha=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r}(\sin\pi-\sin 0)=0$$

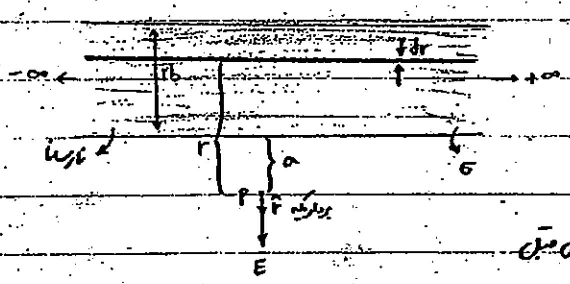
$$E_y=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r}\int_0^{\pi}\sin\alpha\,d\alpha=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r}(\cos 0-\cos\pi)=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\to \vec E=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat r$$



@jozve_iut

مثال: بار با چگالی سطحی یکنواخت و مثبت σ روی یک نوار به عرض 2b و طول بی‌نهایت توزیع شده است. میدان الکتریکی P در شکل زیر را پیدا کنید؟

$a\le r\le a+2b$



جزء dE ها هم جهت هستند.

$$E=\int_{r=a}^{r=a+2b}dE$$

اگر باریکه‌ای طولی از نوار به عرض dr فرض شود طبق مسأله قبل

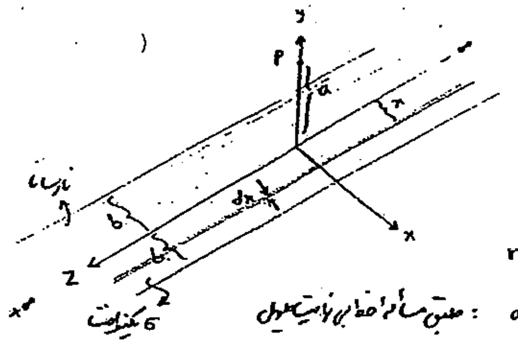
$$dE=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\xrightarrow{*} dE=\frac{\sigma\,dr}{2\pi\epsilon_0 r}$$

سطح یک متر از نوار: طول × عرض $=1(m)\times dr$ ← $\lambda=$ بار یک متر از نوار: $\sigma\,ds=\sigma\times dr$ ⊛

درنتیجه: $E=\int_a^{a+2b}dE=\frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0}\int_a^{a+2b}\frac{dr}{r}=\frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{a+2b}{a}\right)\to \vec E=\frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{a+2b}{a}\right)\hat r$

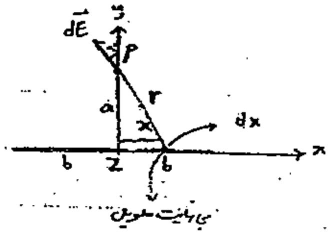
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

مثال) اگر در مسئله‌ی قبل، نقطه‌ی P روی عمود منصف عرضی صفحه نوار عرضی قرار داشته باشد، میدان آن را محاسبه کنید؟



پاسخ: در امتداد z ها مقطع عرضی نوار دیده می‌شود. $r=\sqrt{a^2+x^2}$

طبق مسأله‌ی قطعه‌ی بی‌نهایت طویل: $dE=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$



$\lambda =$ بار یک متر از نوار عرضی $= \sigma \times dS = \sigma \times (1_m \times dx) = \sigma dx$

$$\Rightarrow dE=\frac{\sigma dx}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\sigma dx}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+x^2}}$$

چون نصف باریکه سمت راست و نصف دیگر در سمت چپ y قرار دارد؛ در نتیجه: $E_x=0$

و چون $d\vec{E}$ ها همگی درون صفحه‌ی xy اند، مؤلفه‌ی dE_z نخواهند داشت: $E_z=0$

و فقط باید E_y را حساب کنیم:

$$E_y=\int_{x=-b}^{x=b} dE_y = 2\int_0^b dE_y = 2\int_0^b dE\cos\alpha$$

$$=\frac{2\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}\times\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{\sigma a}{\pi\varepsilon_0}\int_0^b\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\int_0^b\frac{d(x/a)}{1+(x/a)^2}$$

می‌دانیم: $\displaystyle\int\frac{dx}{1+x^2}=\mathrm{Arctg}(x)$

$$\rightarrow E_y=\frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\mathrm{Arctg}(x/a)\Big|_0^b=\frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\left(\mathrm{Arctg}(b/a)-\overbrace{\mathrm{Arctg}(0)}^{0}\right)\Rightarrow$$

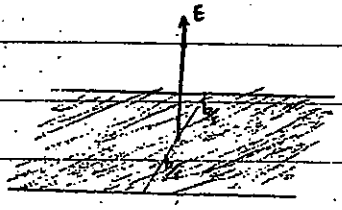
$$E_y=\frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\left(\mathrm{Arctg}(b/a)\right)\longrightarrow \vec{E}=\vec{E_y}=\frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\mathrm{Arctg}(b/a)\,\vec{j}$$

حال اگر حالت خاص $b=\infty$ را در نظر بگیریم. (یعنی صفحه‌ی مسطحی با طول و عرض بی‌نهایت و چگالی یکنواخت)

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\left(\mathrm{Arctg}(b/a)\right)\longrightarrow E=\frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\mathrm{Arctg}\left(\frac{\infty}{a}\right)=\frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\overbrace{\mathrm{Arctg}(\infty)}^{\pi/2}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

پس میدان عمود بر صفحه و به اندازه‌ی $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ می‌باشد.

در مسأله‌ی ۴ (فصل ۲۴) هالیدی به جای σ از 2σ استفاده شده است و به جای $2b$ از b

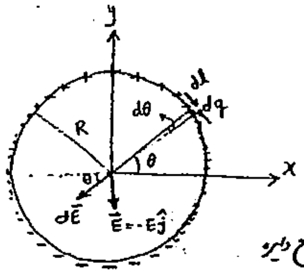


$\sigma\rightarrow 2\sigma$ و $2b\rightarrow b$

در امتداد y: $E=\dfrac{2\sigma}{\pi\varepsilon_0}\mathrm{Arctg}\left(\dfrac{b}{2a}\right)$

@jozve_iut

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان



مثال) مسأله ی ۲۷ (فصل ۲۴) هوردسون

بار واحد طول روی محیط دایره نارسانا = $\lambda = \lambda_0 \sin\theta$

برای ۴/۱ ربع دایره : $E = 4\int_0^{\pi/2} dE = 4\int_0^{\pi/2} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \times \sin\theta$

طولی که بار dq روی آن است : $dl = R\,d\theta$

بار dl = $dq = \lambda\, dl = (\lambda_0 \sin\theta)(R\,d\theta) = \lambda_0 R \sin\theta\, d\theta$

$$\Rightarrow E = 4 \times \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \times \lambda_0 R \int_0^{\pi/2} \sin^2 d\theta = \frac{\lambda_0}{\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{\lambda_0}{\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2\theta\, d\theta\right)$$

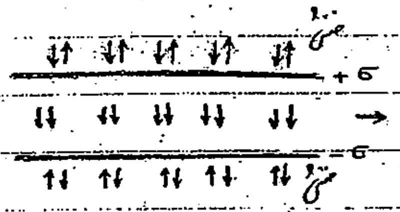
$$= \frac{\lambda_0}{\pi\varepsilon_0 R} \times \frac{1}{2} \times (\pi/2 - 0) \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}\hat{j}$$

مثال) مسأله ۲۰ (فصل ۲۴) هوردسون حل شود. (فقط ۲۵ ← ۵)

توجه: همیشه σ و λ به ترتیب نشان دهنده ی سطح (یک صفحه) و طول (یک خط) هستند.

λ (خطی که به صورت دید می‌شود) ..... σ ——— (صفحه ای که به صورت دید می‌شود)

– در هر ناحیه از فضا که $\vec{E}$ اندازه و جهت ثابت داشته باشد، میدان یکنواخت است.



داخل خازن مسطح ایده آل $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

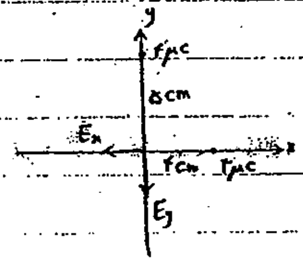
مثال) میدان یکنواختی بصورت $\vec{E} = E\hat{j}$ وجود دارد. ذره ای با سرعت اولیه $\vec{v}_0 = v_0\hat{i}$ از مبداء وارد این میدان می‌شود.

نیروی وارد بر ذره : $\vec{F}_q = q\vec{E} \Rightarrow m\vec{a} = q E\hat{j} \rightarrow a_y = \frac{qE}{m}$ و $a_x = 0$

$y = 0 + 0 + \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2$, $x = 0 + v_0 t + 0$, $t = \frac{x}{v_0}$

معادله ی مسیر حرکت ذره : $y = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2$ $\quad y = \frac{1}{2}\frac{qE}{m v_0^2}x^2$

مثال) مسأله ی ۵ (فصل ۲۴) هوردسون : برآیند میدان در مرکز مختصات کدام است؟



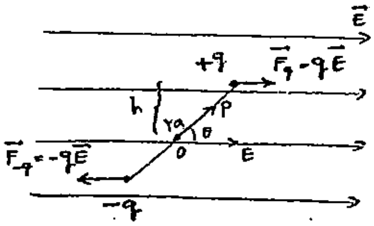
$E_x = \frac{3\times10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0 (4)^2\times10^{-4}} = \frac{0.03}{4^2\times\pi\varepsilon_0}$ $\qquad E_y = \frac{4\times10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0(5)^2\times10^{-4}} = \frac{0.01}{5^2\pi\varepsilon_0}$

$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{1}{\pi\varepsilon_0}\left(\frac{8.2875}{10^4}\right) = 3.11\times10^7$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

دوران دوقطبی الکتریکی در میدان الکتریکی یکنواخت :

(این میدان باعث جابجایی مرکز جرم دوقطبی نمی‌شود)



برآیند نیروهای وارد بر دوقطبی $\vec F_{کل} = \vec F_{+q} + \vec F_{-q} = q\vec E - q\vec E = 0$

پس میدان یکنواخت حرکت مرکز جرم دوقطبی را تغییر نمی‌دهد.

اما چون گشتاور $\vec F_{+q}$ و $\vec F_{-q}$ نسبت به مرکز جرم هم جهت‌اند، دوقطبی به دوران در می‌آید.

$\vec P$: بردار ممان دوقطبی (گشتاور دوقطبی الکتریکی)

اندازه‌ی ممان دوقطبی ← $P = 2aq$

جهت آن از $-q$ به سمت $+q$ قرارداد می‌شود.

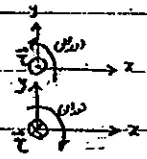
اگر θ زاویه‌ی بین $\vec P$ و $\vec E$ باشد، خواهیم داشت:

درون‌سو ⊗ : $\tau_+ = h F_{+q} = (a\sin\theta)(qE) = aqE\sin\theta$ اندازه گشتاور $\vec F_{+q}$ نسبت به O

درون‌سو ⊗ : $\tau_- = h F_{-q} = (a\sin\theta)(qE) = aqE\sin\theta$ اندازه گشتاور $\vec F_{-q}$ نسبت به O

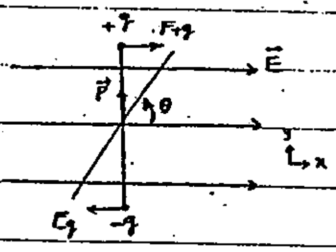
و چون هر دو هم جهت‌اند: $\tau = \tau_o = 2aqE\sin\theta = PE\sin\theta$ نسبت به O

$\vec\tau_o = \vec P \times \vec E$ جهت درون‌سو حاصل می‌شود ⊗



مثلاً اگر $\vec\tau$ در جهت $+z$ باشد : $\tau_z = PE\sin\theta$

و اگر در جهت $-z$ باشد : $\tau_z = -PE\sin\theta$



* از وضعیت $\theta = \frac{\pi}{2}$ دوقطبی را از حالت سکون رها می‌کنیم

$W = \int F_x dx$,

$$W = \int_{\pi/2}^{\theta} \tau_z \, d\theta = \int_{\pi/2}^{\theta} -PE\sin\theta \, d\theta \rightarrow W = PE(\cos\theta - \cos\tfrac{\pi}{2}) = PE\cos\theta \rightarrow W = \vec P \cdot \vec E$$

اما برای نیروهای پایستار داشتیم : $W = -\Delta U \rightarrow W = -(U_\theta - U_{\pi/2})$

← طبق قرارداد $U_{\pi/2} = 0$ فرض می‌شود ← $W = -U_\theta$

@jozve_iut

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

یعنی: $U_0 = -\vec{P}\cdot\vec{E} = -PE\cos\theta$ = انرژی پتانسیل دوقطبی

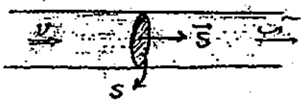
قانون گوس:

$$\varepsilon_0 \oint_{S} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \sum q_i$$

(انتگرال روی سطح بسته S ؛ q_i : داخل سطح بسته S) ← انتگرال سطحی است در نتیجه حجم ندارد.

اگر $\vec{v}$ سرعت ذرات یک سیال باشد

(اندازه $\vec{S}$ با اندازه سطح مقطع (S) برابر است.)



حجم آبی که در هر ثانیه از سطح S می‌گذرد $= SV = \vec{S}\cdot\vec{V}$ = شار حجمی سطح S

$\rho\,\vec{S}\cdot\vec{V}$ = مقدار جرمی که از سطح S در واحد زمان عبور می‌کند.

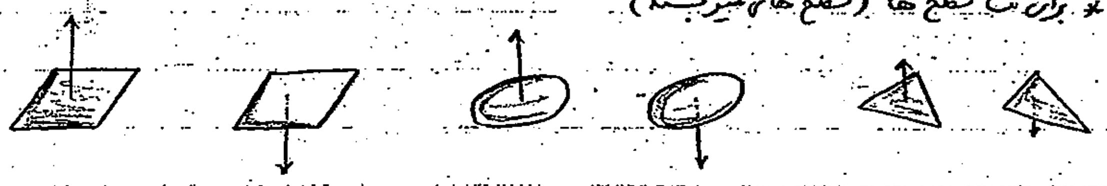
$VS = VS'\cos\theta = \vec{V}\cdot\vec{S'}$ = شار حجمی عبوری از سطح S'

مقدار حجمی از آب که در یک ثانیه از سطح S' عبور می‌کند.

$\vec{V}\cdot\vec{S'} = VS'\cos\theta' = -VS'\cos\theta$

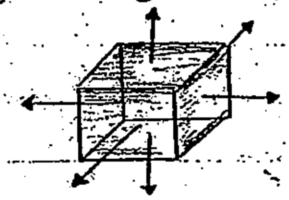
زیرا در شکل سوم $\vec{S'}$ روی $\vec{V}$ مولفه منفی دارد.

* برای تک سطح‌ها (سطح‌های غیربسته)

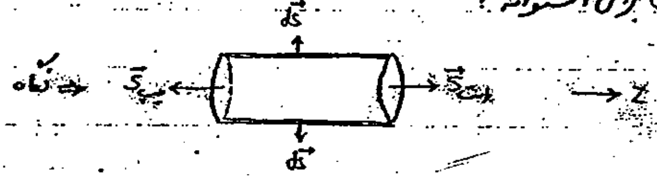


* برای سطوح بسته، جهت $\vec{S}$ باید به طرف خارج باشد (جهت $\vec{S_i}$ ها همه جا عمود بر سطح و به سمت خارج)

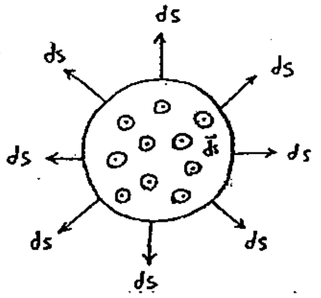
① مکعب مستطیل یک سطح بسته است:



② برای استوانه:



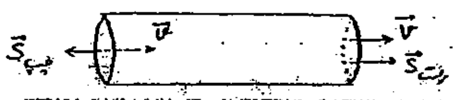
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان



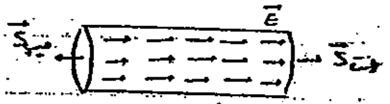
نکته: در امتداد عمود به مقطع استوانه (محور استوانه):

$$S_{چپ} = \int_{سطح چپ} \vec{ds} = S_{چپ}(-\hat{k})$$

در سطح جانبی استوانه، ds ها (جهت های مختلف دارند و در میدان) یکنواخت باشند، برآیند ds ها صفر خواهد شد.



$$\vec{S}_{چپ}\cdot\vec{v} + \vec{S}_{راست}\cdot\vec{v} = (Sv)(-1) + (Sv)(1) = 0$$



شکل (۲)

$\int_{s} \vec{E}\cdot\vec{ds}$ روی سطح = شار میدان الکتریکی

بطور کلی: شار بردار A برای سطح S $= \int_s \vec{A}\cdot\vec{ds}$

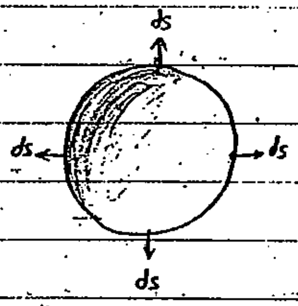
در شکل (۲): سطح مقطع ← $\vec{S}_{چپ}\cdot\vec{E} + \vec{S}_{راست}\cdot\vec{E} = SE(-1) + SE(+1) = 0$

سطح جانبی ← $\int_{سطح جانبی} \vec{E}\cdot\vec{ds} = \int 0 = 0$ ← چون $\vec{E}$ و $\vec{ds}$ بر هم عمودند

شار کل سطح بسته ی استوانه $= 0$

به سطوح گوسی (مکعب مستطیل، استوانه، کره و ...) هم فرض اند.

(۳) برای کره: (همه ds های مربوط به کره باید در نظر گرفته شود)



اگر جزء بسیار کوچک از سطح باقی بماند، با $\int \vec{ds}$ نشان می دهیم. در غیر این صورت (کل سطح) با $\oint \vec{ds}$

$$\int_{کل سطح بسته کره} \vec{ds} = \oint \vec{ds} = 0$$

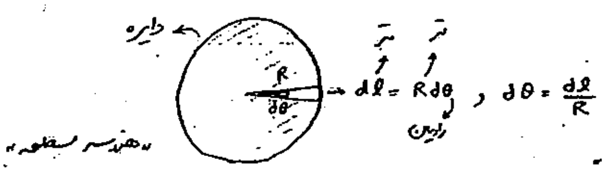
و برای میدان یکنواخت داریم: (فی بزرگ) Φ شار مغناطیسی

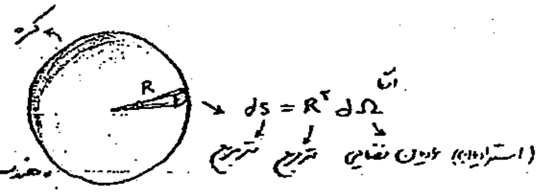
$$\Phi_E = \text{شار الکتریکی کل سطح کره} = \oint_{کره} \vec{E}\cdot\vec{ds} = \vec{E}\cdot\oint\vec{ds} = 0$$

@jozve_iut

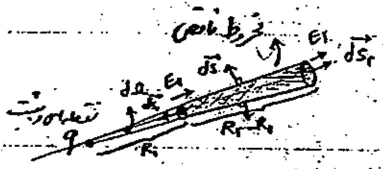
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

← و اگر داخل کره‌ی فرضی، بار الکتریکی وجود داشته باشد، میدان نقاط اطراف آن یکنواخت نیست.





زاویه‌ی فضایی روبه‌رو به سطح ds (جزء کوچکی از سطح کره) $= d\Omega = \frac{ds}{R^2}$ = ... برحسب استرادیان



⇐ سطح بسته و $ds_1 < ds_2$, $E_1 > E_2$

شار کل سطح فرضی مخروط ناقص $= \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \vec{E}_1\cdot d\vec{s}_1 + \int_{\text{جانبی}} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \vec{E}_2\cdot d\vec{s}_2$ (چپ، جانبی: عمود، راست)

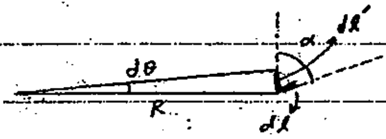
شار الکتریکی $= E_1 ds_1 \cos(180) + \int 0 + E_2 ds_2 \cos(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2}(R_1^2 d\Omega)(-1) + 0 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2}(R_2^2 d\Omega)$

$= \frac{-q\,d\Omega}{4\pi\epsilon_0} + \frac{q\,d\Omega}{4\pi\epsilon_0} = 0$

@jozve_iut

و در داخل مخروط ناقص فوق هم بار نیست.

* هندسه مسطحه:



$dl' = R d\theta$ ← dl' روی محیط دایره است

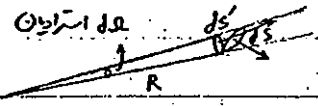
ولی dl روی دایره نیست ← چون $dl' = dl\cos\alpha$

dl' تصویر dl روی امتداد خط dl' است.

↳ $R d\theta = dl\cos\alpha$ → $d\theta = \frac{dl}{R}\cos\alpha$

⇒ $\oint \frac{dl\cos\alpha}{R} = \oint d\theta = 2\pi$

* هندسه فضایی:



چون ds' روی سطح کره به شعاع R است:

$ds' = R^2 d\Omega$

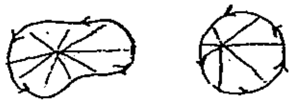
چون ds' تصویر ds روی امتداد سطح ds' است داریم: $ds' = ds\cos\alpha$

→ $ds\cos\alpha = R^2 d\Omega$: زاویه‌ی فضایی جزئی در هندسه فضایی $= d\Omega = \frac{ds}{R^2}\cos\alpha$

← و حالا بحث را در هندسه مسطحه داریم:

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

جمع طول زوایای رو به رو به هر منحنی بسته = $\oint d\theta = 2\pi$ (آپادساعتگرد)

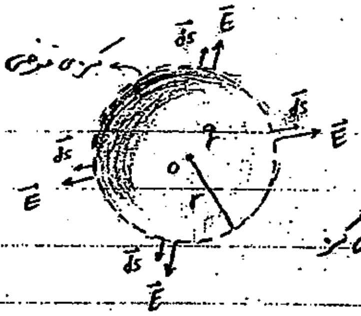


و $\oint d\theta = -2\pi$ (ساعتگرد)

* در حوزه فضایی هم جمع همه‌ی $d\Omega$ های رو به رو به هر سطح بسته‌ای برابر 4π رادیان فضایی (استرادیان) می‌باشد.

$\oint d\Omega = 4\pi$ (فرقی ندارد)

* قانون گوس برای بار $q>0$



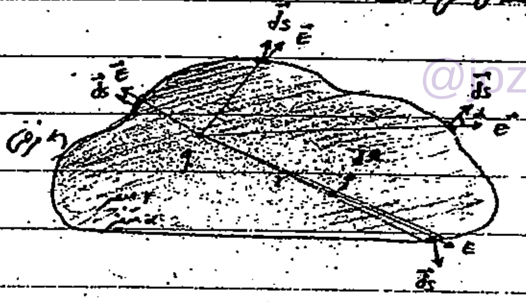
$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$

$E \oint ds = ...$

شار کل سطح بسته‌ی فرضی کره: $\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \oint \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} ds \cos(0) =$

$\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\oint_{\text{سطح کل کره}} ds = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\times 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon_0\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = q$

* در حالت کلی‌تر برای بار نقطه‌ای q که داخل یک سطح بسته‌ی کلی است.



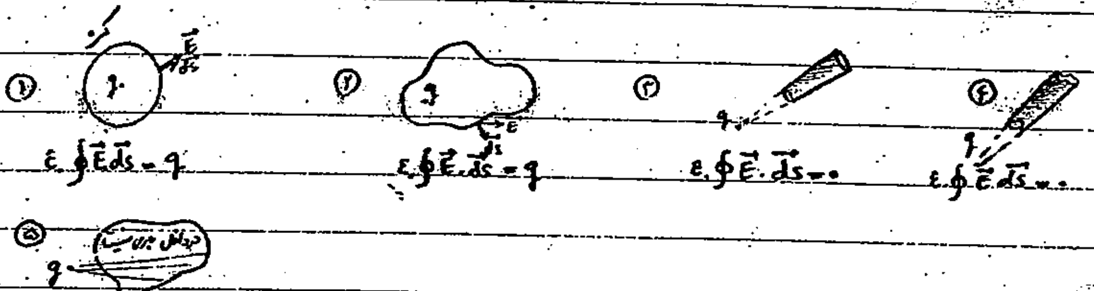
شار کل الکتریکی عبوری از سطح بسته فرضی رو به رو $= \oint \vec{E}\cdot\vec{ds}$

$= \oint E\, ds \cos\alpha = \oint \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} ds \cos\alpha$ (متغیر)

$= \frac{q}{4\pi\varepsilon}\oint \frac{ds}{r^2}\cos\alpha = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\times 4\pi \Rightarrow \oint\vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow \varepsilon_0\oint\vec{E}\cdot\vec{ds} = q$ در حالت کلی

تصاویر کلی:



① $\varepsilon_0\oint\vec{E}\vec{ds} = q$

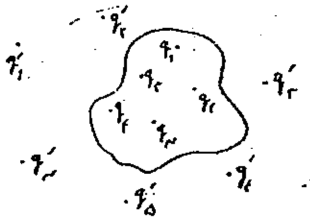
② $\varepsilon_0\oint\vec{E}\cdot\vec{ds} = q$

③ $\varepsilon_0\oint\vec{E}\cdot\vec{ds} = 0$

④ $\varepsilon_0\oint\vec{E}\vec{ds} = 0$

⑤ $\varepsilon_0\oint\vec{E}\vec{ds} = 0$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان



← در حالت کلی: n بار نقطه‌ای q_i در داخل سطح بسته مورد نظر و n' بار نقطه‌ای q'_i در خارج سطح بسته وجود دارد.

به ترتیب E_i ها (1 تا n) میدان های حاصل از q_i ها هستند.
و به ترتیب E'_i ها (1 تا n') میدان های حاصل از q'_i ها هستند.

برای q_i ها داریم:

$$n \text{ رابطه } \begin{cases} \varepsilon_0 \oint \vec{E}_1 \cdot \vec{ds} = q_1 \\ \varepsilon_0 \oint \vec{E}_2 \cdot \vec{ds} = q_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_0 \oint \vec{E}_n \cdot \vec{ds} = q_n \end{cases}$$

و برای q'_i ها نیز داریم:

$$n' \text{ رابطه } \begin{cases} \varepsilon_0 \oint \vec{E}'_1 \cdot \vec{ds} = 0 \\ \varepsilon_0 \oint \vec{E}'_2 \cdot \vec{ds} = 0 \\ \vdots \\ \varepsilon_0 \oint \vec{E}'_{n'} \cdot \vec{ds} = 0 \end{cases}$$

@jozve_iut

میدان کل در هر نقطه از فضا $= \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n + \vec{E}'_1 + \vec{E}'_2 + \dots + \vec{E}'_{n'} =$ برآیند $n+n'$ بردار میدان.

حال سمت چپ همه رابطه های فوق را با هم جمع می‌کنیم و سمت راست ها را با هم

$$\Rightarrow \varepsilon_0 \oint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n + \vec{E}'_1 + \vec{E}'_2 + \dots + \vec{E}'_{n'}) \cdot \vec{ds} = q_1 + q_2 + \dots + q_n + 0 + 0 + \dots + 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \sum_{i=1}^{n} q_{i\,\text{داخلی}} \quad \text{(قانون گوس)}$$

$\vec{E}$ میدان کل هر نقطه از نقاط روی سطح بسته (سطح گوسی)

← توجه: با اینکه فقط q_i های داخلی نقش دارند ولی $\vec{E}$ مربوط به کل q_i ها (چه داخل و چه خارج) می باشند.

* کاربردهای قانون گوس:

دو دسته مسئله را با قانون گوس $\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \sum_{i} q_{i\,\text{داخلی}}$ حل می‌کنیم:

الف - اگر توزیع بار معلوم باشد ولی اندازه ی میدان E ($E = |\vec{E}|$) مجهول: فقط در سه حالت پیدا کردن $\vec{E}$ با قانون گوس امکان پذیر است.

۱- تقارن کروی کامل

۲- تقارن استوانه ای طویل (تقارن خطی و استوانه ای طویل) ← بی نهایت طویل

۳- تقارن سطحی بسیار بزرگ (سطح مسطح)

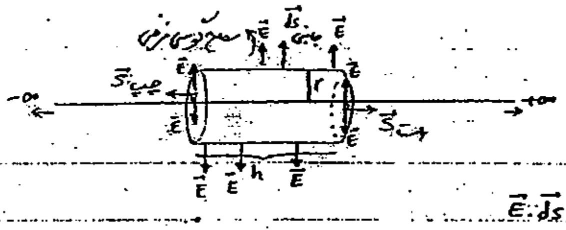
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

از مشتق گیری های $\nabla\cdot A$ یا $\nabla^2 Q$ ... از تقعیه گوس ثابت می‌شود که اگر $r=0$ مبداء مختصات داخل سطح گوس فرضی نباشد

$\oint \frac{\hat r}{r^2}\cdot d\vec s = \dots = 0$

ب - اگر میدان نقاط معلوم باشند (E : معلوم) : در این صورت می‌توان در مورد نحوه‌ی توزیع بار با قانون گوس، اطلاعاتی پیدا نمود. (سطح بسته)

مسئله ۱. (ساده‌ترین مسئله) برای خط بی‌نهایت طویل با توزیع طولی یکنواخت (خط مستقیم) . λ = بار واحد طول



چون قانون گوس برای هر سطح بسته‌ای صحیح است، برای سطح بسته‌ی استوانه نیز صحیح می‌باشد.

$$\varepsilon_0 \oint \vec E\cdot d\vec s = \text{بار درون استوانه} = h\lambda$$

$$\vec E\cdot d\vec s_{\text{چپ}} = E\,ds\cos 90 = 0 \quad , \quad \vec E\cdot d\vec s_{\text{راست}} = E\,ds\cos 90 = 0$$

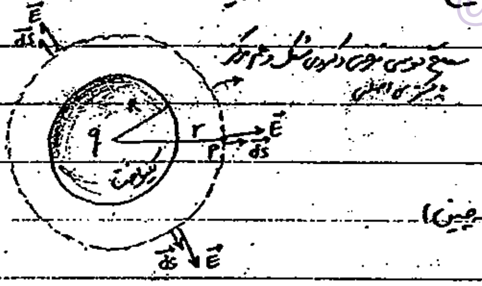
$$\Rightarrow 0 + \varepsilon_0\int_{\text{سطح جانبی}} \vec E\cdot d\vec s + 0 = h\lambda \Rightarrow \varepsilon_0\int_{\text{جانبی}} E\,ds\cos(0) = \lambda h$$

(موازی و هم جهت)

چون خط بار محور تقارن استوانه است پس اندازه‌ی $\vec E$ (E) در تمام نقاط روی سطح استوانه یکسان است (و ثابت).

$$\varepsilon_0 E\int_{\text{جانبی}} ds = \lambda h \to \varepsilon_0 E\times 2\pi r h = \lambda h \to E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

مسئله ۲. بار q (مثبت) بطور یکنواخت در حجم کره‌ای به شعاع R توزیع شده است. میدان الکتریکی نقاط خارج و نقاط داخل این کره را پیدا کنید؟



(یک سطح فرضی کروی بسته)

الف) نقاط خارج: $r>R$

$$\to \varepsilon_0\oint \vec E\cdot d\vec s = +q \to \varepsilon_0\oint E\,ds\cos(0) = q$$

و چون دو کره هم مرکزند و توزیع بار یکنواخت است، روی سطح گوسی (نقطه چین) $\vec E$ ها همگی هم اندازه‌اند (ثابت)

$$\varepsilon_0 E\oint_{\text{سطح کره گوسی}} ds = q \to \varepsilon_0 E\times 4\pi r^2 = q \to E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$\to \vec E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat r \; , \; r\geq R$ (مثل میدان بار نقطه‌ای) ← توجه: $\vec E$ به شعاع R بستگی ندارد!

$\vec E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat r \; , \; r=R$ (میدان روی سطح کره‌ی اصلی)

ب) نقاط داخل: $r<R$

بار واحد حجم (توزیع یکنواخت): $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \to \rho = \frac{3q}{4\pi R^3}$

بار درون کره‌ی گوسی کوچک: $q_{\text{داخل}} = \rho\times\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{3q}{4\pi R^3}\times\frac{4}{3}\pi r^3 \to q_{\text{داخل}} = \frac{q}{R^3}r^3$

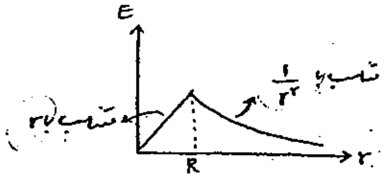
قانون گوس برای کره‌ی فرضی بسته: $\varepsilon_0\oint_{\text{کره}} \vec E\cdot d\vec s = \frac{q}{R^3}r^3 \;,\; \varepsilon_0\oint \vec E\cdot d\vec s = \varepsilon_0\oint E\,ds\cos(0) = \frac{q}{R^3}r^3$

زیرا بار مثبت و دو کره هم مرکز و توزیع بار یکنواخت

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان
@jozve_iut

اما به دلیل توزیع یکنواخت و هم مرکز بودن دو کره $\vec{E}$ روی سطح کره گوسی ثابت اندازه اند.

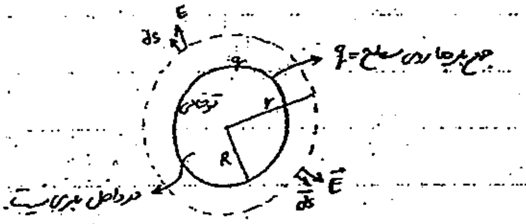
$$\varepsilon_0 E \oint_{\text{سطح گوسی}} ds = \frac{q}{R^3} r^3 \rightarrow \varepsilon_0 E \times 4\pi r^2 = \frac{q}{R^3} r^3 \rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$$



← در حالت خاص $r=R$ خواهیم داشت: $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{r}$

در مرکز: $\vec{E} = 0$

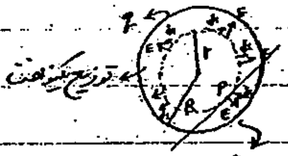
مسأله ۲: بار q مثبت به طور یکنواخت روی سطح کره‌ای به شعاع R توزیع شده است. میدان نقاط خارج و داخل را پیدا کنید؟



الف) برای $r>R$ (خارج کره)

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = q \;\;\; \varepsilon_0 E \times 4\pi r^2 = q \rightarrow E_{\text{خارج}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

ب) برای $r<R$ (داخل کره)



$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}_{\text{داخل}}\cdot\vec{ds} = 0$$

به دلیل توزیع یکنواخت اگر در P میدان وجود داشته باشد شعاعی است (که آن را به سمت خارج فرض می‌کنیم)

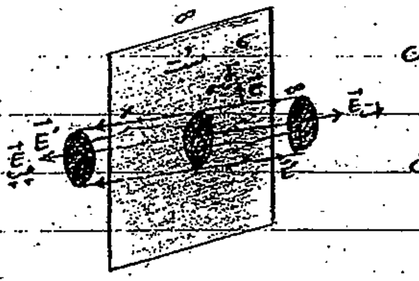
$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

$$\rightarrow \varepsilon_0 \oint E\,ds\,\cos(0) = 0$$

چون دو کره هم مرکز هستند پس E ها ثابت اندازه اند: $\varepsilon_0 E \oint ds = 0 \rightarrow \varepsilon_0 E(4\pi r^2) = 0$

به دلیل آنکه $4\pi\varepsilon_0 r^2 \neq 0$ در نتیجه: $E = 0$

مثال) اثبات رابطه $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ برای سطح مسطح بی‌نهایت بزرگ با چگالی سطحی یکنواخت σ؟



حل: به دلیل توزیع یکنواخت و بی‌نهایت بودن ابعاد صفحه، مسطح میدان در مجاورت آن بر سطح عمود است. $(\sigma>0)$

اگر x = فاصله P از صفحه = فاصله P' از صفحه، بدیهی است در این صورت

$$|\vec{E}_{\text{چپ}}| = |\vec{E}_{\text{راست}}| = E$$

و اگر دو فاصله مخالف باشند نمی‌توانند E را هم اندازه فرض کرد.

برای سطح گوسی استوانه‌ای شکل و فرضیات فوق داریم:

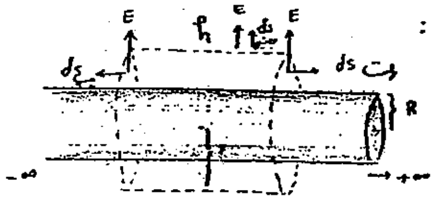
$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \sigma\pi R^2$$

$$\varepsilon_0 \int_{\text{قاعده راست}} \vec{E}\cdot\vec{ds} + \varepsilon_0 \int_{\text{جانبی عمود}} \vec{E}\cdot\vec{ds} + \varepsilon_0 \int_{\text{قاعده چپ}} \vec{E}\cdot\vec{ds} = \sigma\pi R^2 \longrightarrow \varepsilon_0 E\pi R^2 \times 1 + 0 + \varepsilon_0 E\pi R^2 \times 1 = \sigma\pi R^2$$

$$\longrightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

مثال) استوانه‌ای طویل به شعاع R و بار واحد حجم ρ (ثابت) موجود است:



الف) برای $r \geq R$

$$\epsilon_0 \oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = q_{enc} = \rho \times (h \times \pi R^2)$$

$$\rightarrow \epsilon_0 \int_{چپ} \vec{E}\cdot\vec{ds} + \epsilon_0 \int_{جانبی} \vec{E}\cdot\vec{ds} + \epsilon_0 \int_{راست} \vec{E}\cdot\vec{ds} = \pi \rho R^2 h$$

چون میدان همه جا در امتداد شعاع دایره‌ای مقطع استوانه است پس: $\vec{E}\cdot\vec{ds}_{راست} = \vec{E}\cdot\vec{ds}_{چپ} = 0$

$$\vec{E}\cdot\vec{ds}_{جانبی} = E\,ds\,\cos(0) = E\,ds$$

$$\rightarrow 0 + \epsilon_0 \int_{جانبی} E\,ds + 0 = \pi\rho R^2 h$$

چون در استوانه همه محورانند پس E روی سطح جانبی استوانه گوسی ثابت اندازه است.

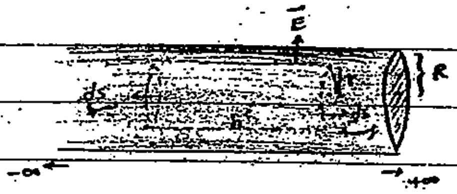
$$\rightarrow \epsilon_0 E \int_{جانبی} ds = \pi\rho R^2 h \rightarrow \epsilon_0 E (2\pi r h) = \pi \rho R^2 h \rightarrow E_{r\geq R} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$$

$\lambda =$ بار یک متر از استوانه اصلی $= \rho \times (\pi R^2 \times 1$ متر$) \rightarrow \lambda = \rho \pi R^2$ (*)

(*) $\rightarrow E_{r\geq R} = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \rightarrow$ شبیه رابطه میدان بار خطی طویل

@jozve_iut

ب) برای $r < R$



$$\epsilon_0 \oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \rho(\pi r^2 h')$$

به دلیل یکنواختی توزیع بار و بی‌نهایت طویل بودن استوانه اصلی $\vec{E}$ همه جا شعاعی است:

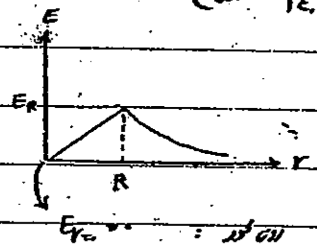
یعنی با $\vec{ds}$ چپ و $\vec{ds}$ راست زاویه ۹۰ و با $\vec{ds}$ جانبی زاویه صفر می‌سازد (زاویه صفر)

$$0 + \epsilon_0 \int_{جانبی} E\,ds \times 1 + 0 = \rho\pi r^2 h'$$

و چون در استوانه همه محورند E ثابت اندازه است.

$$\epsilon_0 E \int_{جانبی} ds = \rho\pi r^2 h' \rightarrow \epsilon_0 E\, 2\pi r h' = \rho \pi r^2 h' \rightarrow E_{داخل} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r$$

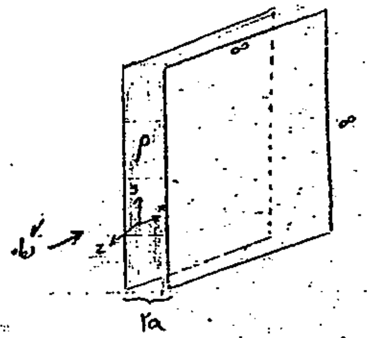
روی سطح استوانه اصلی که $r_{خارج} = R = r_{داخل}$ خواهیم داشت: $E_{سطح} = \dfrac{\rho}{2\epsilon_0} R$

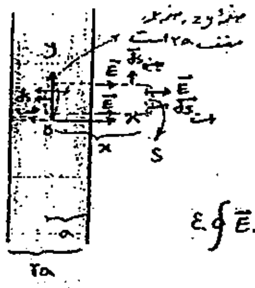


$E_{r=0} = 0$: روی محور

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

مثال) اگر بار با چگالی حجمی مثبت و یکنواخت ρ (ثابت و مثبت) در همه‌ی نقاط بین دو صفحه‌ی بی‌نهایت بزرگ موازی توزیع شده باشد اندازه‌ی $\vec{E}$ را برای نقاط داخل بار و نقاط خارج بار پیدا کنید؟





با توجه به تقارن و توزیع یکنواخت بار

$E_{(x=0)}=0$

برای $x>a$

$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = q_{\text{داخل}} = q_{enc}$

$\rightarrow \varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \rho S\times a$ (حجم مثبت باردار داخل سطح گوسی فرضی: $S\times a$)

$E_{\text{چپ}} = 0$ روی صفحه‌ی yz

$\rightarrow 0 + 0 + \varepsilon_0 E S\times 1 = \rho S a \rightarrow E_{\text{خارج}} = E_{x>a} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} a$

که $E_{\text{خارج}}$ به فاصله بستگی ندارد.

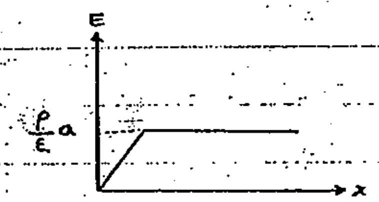
و برای نقاط داخل بار که $x<a$

$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = q_{\text{داخل}} = \rho (Sx)$

$\rightarrow \underset{\text{چپ}}{0} + \underset{\text{جانبی}}{0} + \varepsilon_0 S E\times 1 = \rho S x \rightarrow E_{\text{داخل}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} x$

که برخلاف برای نقاط خارج، به فاصله بستگی دارد.

در نقاط روی سطح $x=a$: $E_{\text{داخل}} = E_{\text{خارج}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} a$



مثال) فرض کنید بار Q (مثبت) به طور غیر یکنواخت و با چگالی حجمی $\rho = \frac{\alpha}{r}$ در حجم کره‌ای به شعاع R توزیع شده باشد (که r فاصله‌ی نقاط درون کره از مرکز آن است) ($0<r<R$).

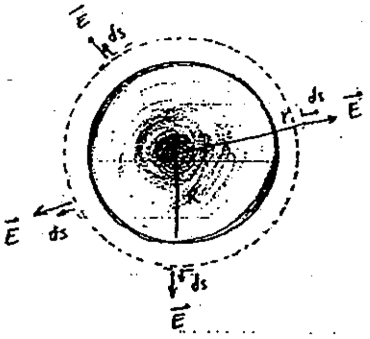
الف) پارامتر ثابت α را محاسبه کنید؟

ب) اندازه‌ی میدان نقاط داخل و خارج کره را پیدا کنید؟

$Q_{\text{کل}} = \int_0^R \rho\, dv$ ؛ حجم بین r و $r+dr$: $dv = 4\pi r^2 dr$

$\rightarrow Q = \int_0^R \frac{\alpha}{r}\times 4\pi r^2 dr = 4\pi\alpha \times \frac{1}{2}R^2 = 2\pi\alpha R^2 \Rightarrow \alpha = \frac{Q}{2\pi R^2}$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان



ب) «برای خارج»

بدلیل تقارن کروی توزیع بارها، $\vec{E}$ ها همه جا شعاعی اند، یعنی با $\vec{ds}$ ها زاویه صفر خواهند ساخت.

$$\rightarrow \varepsilon_0 \oint \vec{E}_{خارج} \cdot \vec{ds} = Q \rightarrow \varepsilon_0 \oint E_{خارج}\, ds \times 1 = Q$$

چون کره ی گوسی با کره اصلی هم مرکز است، $E_{خارج}$ ثابت اندازه است:

$$\varepsilon_0 E_{خارج} \times 4\pi r^2 = Q \Rightarrow E_{خارج} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad r \geq R$$

«برای داخل»

کره ی گوسی را هم مرکز با کره ی حامل می گیریم

$$\rightarrow \varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = q_{داخل\ سطح} = \int^r \rho\, dr$$

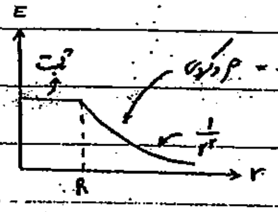
$$\varepsilon_0 \oint E_{داخل}\, ds \times 1 = \int^r \frac{\alpha}{r} \times 4\pi r^2 dr \rightarrow \varepsilon_0 E_{داخل} \oint ds = 4\pi\alpha \int^r r\, dr$$

(ثابت اندازه)

$$\rightarrow \varepsilon_0 E_{داخل} \times 4\pi r^2 = 4\pi\alpha \times \frac{1}{2} r^2 \rightarrow E_{داخل} = \frac{\alpha}{2\varepsilon_0} = ثابت$$

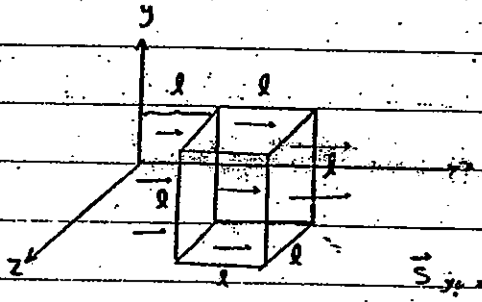
$$E_{داخل} = \frac{Q}{2\pi R^2} \times \frac{1}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$: میدان نقاط داخل حجم کره

میدان ثابت است (مستقل از r است)



پ- حالتی که $\vec{E}$ معلوم است و در مورد توزیع بار سوال می شود:

مثال) فرض کنید در تمامی نقاط معینی از فضا: $\vec{E} = \frac{E_0}{l} x \vec{i}$ باشد. در مکعب مستطیلی که به شکل زیر در این میدان قرار دارد چه بار الکتریکی وجود دارد؟



$$\vec{E}_{x=l} = \vec{E}_{سطح\ چپ\ مکعب} = \frac{E_0}{l} l \vec{i} = E_0 \vec{i} = \vec{E}_0$$

$$\vec{E}_{x=2l} = \vec{E}_{سمت\ راست\ مکعب} = 2E_0 \vec{i} = 2\vec{E}_0$$

$$\vec{S}_{بالا} = l^2 \vec{j}, \quad \vec{S}_{پایین} = -l^2 \vec{j}, \quad \vec{S}_{جلو} = l^2 \vec{k}, \quad \vec{S}_{عقب} = -l^2 \vec{k}$$

$$\vec{S}_{راست} = l^2 \vec{i}, \quad \vec{S}_{چپ} = -l^2 \vec{i}$$

@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

برای مکعب فوق که یک سطح بسته است داریم: $\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = q_{\text{داخل مکعب}}$

$$\Rightarrow \varepsilon_0\left(\int \vec{E}\cdot d\vec{s}_{\text{بالا}} + \int \vec{E}\cdot d\vec{s}_{\text{پائین}} + \int \vec{E}\cdot d\vec{s}_{\text{عقب}} + \int \vec{E}\cdot d\vec{s}_{\text{جلو}} + \int \vec{E}\cdot d\vec{s}_{\text{راست}} + \int \vec{E}\cdot d\vec{s}_{\text{چپ}}\right) = q_{\text{داخل}}$$

$$(i\cdot j = i\cdot k = 0,\ i\cdot i = 1) \Rightarrow q_{\text{داخل}} = \varepsilon_0(0+0+0+0 - E_0 l^2(\hat{i}\cdot\hat{i}) + 2E_0 l^2(\hat{i}\cdot\hat{i})) = \varepsilon_0 E_0 l^2$$

در حالت الکترواستاتیک که بارها ساکن اند باید در درون فلزات میدان صفر باشد.

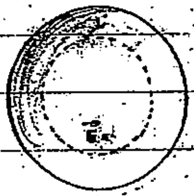
باید: $\vec{E}_{\text{فلز}}$ = میدان درون جسم هر فلز در حالت الکترواستاتیک $= 0$

← زیرا اگر $\vec{E}_{\text{فلز}} \neq 0$ (در حالت الکترواستاتیک) باشد:

$$\vec{F}_{\text{نیروی وارد بر الکترون}} = -e\vec{E} \neq 0 \Rightarrow m_e\vec{a} = -e\vec{E} \Rightarrow \text{شتاب الکترون} = \vec{a} = -\frac{e}{m_e}\vec{E} \neq 0$$

پس الکترون درون جسم فلزات به حرکت درمی‌آید. یعنی وضعیت الکترواستاتیک نیست.

مثال) یک کره‌ی فلزی دارای بار Q است. $Q>0$ یا $Q<0$ ← جمع جبری همه بارهای تشکیل دهنده‌ی کره‌ی فلزی



می‌خواهیم ثابت کنیم که همه بارها روی سطح فلز می‌آیند

$$q_{\text{داخل}} = \varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} \rightarrow q_{\text{داخل}} = 0$$

وقتی سطح گوسی خود را (نقطه‌چین) را بسیار به سطح اصلی کره نزدیک کنیم (شعاع R)

(به اندازه‌ی ϵ بسیار کوچک فاصله دارند)

پس بارها روی سطح خارجی قرار می‌گیرند. ← $q_{\text{داخل}} = 0$ چون در جسم فلزی هستیم (یعنی $\vec{E}=0$)

← در حالت الکترواستاتیک:

q_1 = بار کل فلز

q = بار داخل حفره که با فلز در تماس نیست.

S_1 = سطح داخلی فلز

S_2 = سطح خارجی فلز

حفره = ناحیه‌ی توخالی در فلز

← در حالت الکترواستاتیک در قسمت داخلی فلز، بار صفر است.

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

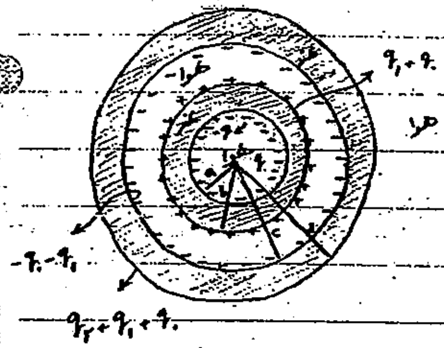
← سطح گوسی فرضی را طوری در نظر می‌گیریم که همه‌ی قسمت‌های آن درون جسم فلزی باشد.

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}_{\text{فلز}} \cdot d\vec{s} = \sum q_{i\,\text{داخل}} \Rightarrow 0 = q_0 + q_{s_1}$$

بار توزیع شده روی سطح داخلی (S_1) $\quad q_{s_1} = -q_0$

و لذا اگر $q_0 = 0$ باشد آنگاه: $q_{s_1} = 0$

$$\text{بار کل فلز} = q_1 \rightarrow q_{s_1} + q_{s_2} = q_1 \rightarrow -q_0 + q_{s_2} = q_1 \rightarrow q_{s_2} = q_0 + q_1$$



← در دو پوسته‌ی فلزی هم مرکز:

$(q_0 \geq 0)$

$$q_{s_c} + q_{s_d} = (-q_0 - q_1) + (q_0 + q_1 + q_2) = q_2$$

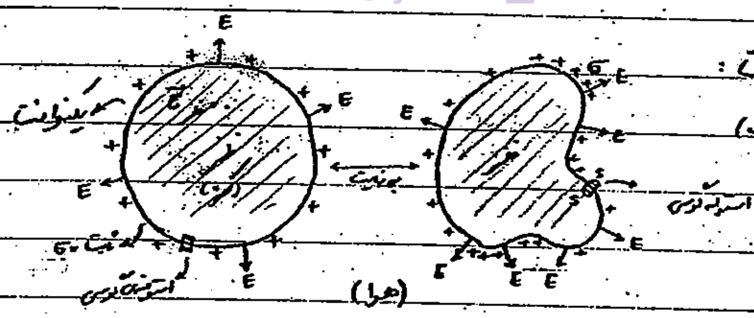
= کل بار پوسته‌ی فلزی بزرگ.

به دلیل هم مرکز بودن دو پوسته: $\sigma_c = \dfrac{-q_0 - q_1}{4\pi c^2}$

← q_1 کل بار فلز داخلی $\qquad q_2$ ← کل بار فلز خارجی

چگالی سطحی بار برای فلزات:

(در حالت الکترواستاتیک)



← در مجاورت فلز میدان عمود بر سطح فلز است.

← زیرا اگر مولفه به موازات سطح فلز داشته باشد، الکترون‌ها را به حرکت در می‌آورد که دیگر وضعیت الکترواستاتیک نخواهد بود.

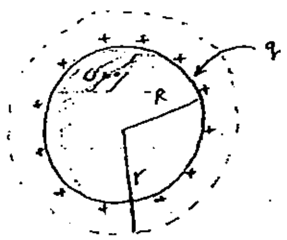
داخل فلز میدان صفر است.

در شکل نامتقارن بالا → $\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \sigma S \Rightarrow \underset{\text{داخل فلز}}{0} + \underset{\text{جانبی}}{0} + \varepsilon_0 E S = \sigma S \rightarrow E_{\text{کنار فلز}} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (یعنی استوانه گوسی)

در کره فلزی بالا → ...... → $E_{\text{بیرون فلز}} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

@jozve_iut
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

اثبات نقطه برای شکل کروی:



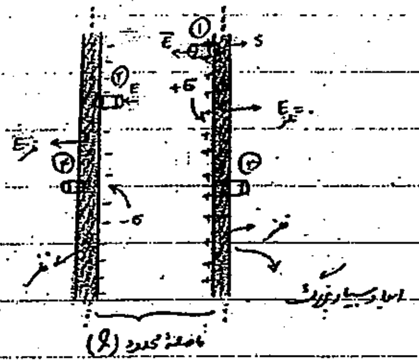
$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$ (یکنواخت)

$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = q \; : \; \varepsilon_0 \times 4\pi r^2 E = q \rightarrow E_{\text{خارج}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \; , \; r \geq R$

$(E = 0 \; , \; r < R)$

$E_{\text{روی سطح}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\frac{q}{4\pi R^2}}{\varepsilon_0} \rightarrow E_{\text{روی سطح}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

← برای خازن مسطح ایده‌آل:



اگر ثابت شود در هر صفحه‌ی خازن نصف بار را بر یک سطح و نصف آن در طرف دیگر متمرکز خواهد بود.

$(1): \varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \sigma S \rightarrow \underset{\text{جانبی}}{0} + \underset{\text{داخل فلز}}{0} + \varepsilon_0 E S = \sigma S \rightarrow E_{\text{میدان کل}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

← و برای سطح گوسی سمت چپ - داخل (۲):

$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\sigma S \rightarrow 0 + 0 + 0 + \varepsilon_0 E(-1) = -\sigma S \rightarrow E_{\text{داخل}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (میدان کل)

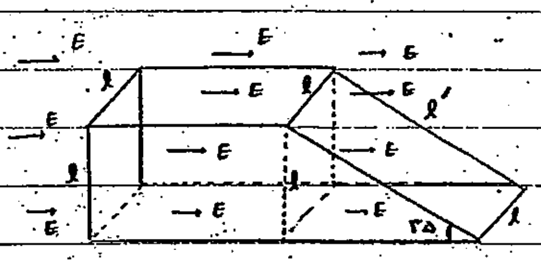
← و برای استوانه‌ی گوسی شماره‌ی ۲

$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0 \rightarrow 0 + 0 + \varepsilon_0 E S \times 1 = 0 \; , \; \varepsilon_0 S \neq 0 \rightarrow E_{\text{خارج}} = 0$

برای سطح گوسی شماره ۴ هم به همین صورت عمل می‌کنیم که در هر حال: $E_{\text{خارج}} = 0$

مسئله‌ی ۳ فصل ۲۵ (هالیدی)

شار عبوری از سطح $\ell\ell'S'$



$\ell' = \frac{\ell}{\sin 35}$

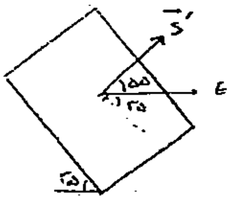
اگر بدانیم که داخل سطح بسته‌ی فوق باری وجود ندارد: $\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$ ← بار داخل

← چهار سطح بالا و پایین و جلو و عقب که با $\vec{E}$ موازی‌اند شار صفر دارند: $\Phi_{\text{بالا}} = \Phi_{\text{پایین}} = \Phi_{\text{جلو}} = \Phi_{\text{عقب}} = 0$

$\rightarrow 0 + 0 + 0 + 0 + \vec{E}\cdot\vec{S}_{\text{چپ}} + \vec{E}\cdot\vec{S}_{\text{راست}} = 0 \rightarrow E\ell^2(-1) + \Phi = 0 \rightarrow \Phi_{\text{راست}} = E\ell^2$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

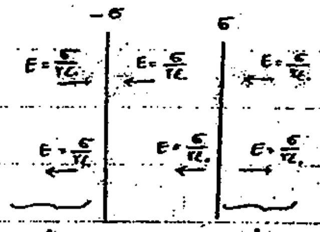
← در این شکل مسأله ۲ روش مستقیم است:



$$\Phi_{S'} = \vec{E}\cdot\vec{S'} = ES'\cos 55 = E\times\frac{\ell^2}{\sin 35}\times\cos 55 = E\ell^2$$

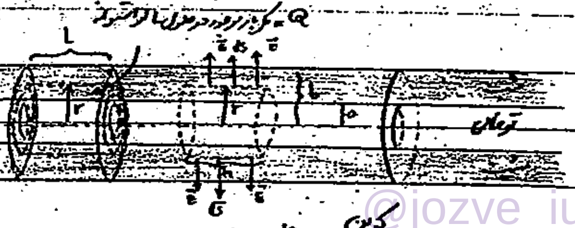
مسأله ۵ فصل ۲۵ (هودسون)

اصل برهم‌نهی = اصل برآیندگیری.



$\to E_{کل} = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

مسأله ۱۵ فصل ۲۵ (هودسون)



(الف) $\rho = \frac{k}{r}$ ← $\frac{کولن}{(متر)^3} = \frac{k}{متر}$

$\Rightarrow k = \frac{کولن}{متر مربع}$

@jozve_iut

(ب) $Q = \int_{r=a}^{r=b} \rho\, dv$ حجم بین r و $r+dr$: $dv = (2\pi r)L \times dr$ (محیط ... سطح جانبی ... ضخامت)

$$\to Q = \int_a^b \frac{k}{r}\times 2\pi r L\, dr = 2\pi k L\int_a^b dr \Rightarrow Q = 2\pi k L(b-a)$$

(ج) الکتریکی را در نقاط بین a تا b را پیدا کنید؟

برای سطح گوسی استوانه‌ای شکل به شعاع r و ارتفاع h که هم‌محور با استوانه اصلی است انتخاب می‌کنیم

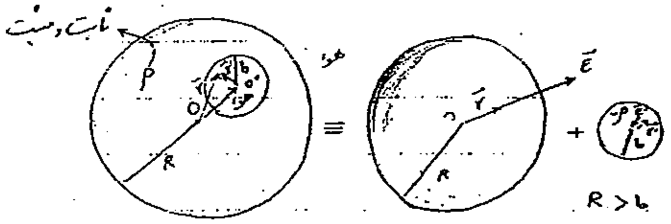
$$\to \varepsilon_0\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = q_{داخل استوانه h} = \int_a^r \frac{k}{r}\times 2\pi r h\, dr \to \underset{چپ}{0} + \varepsilon_0\int_{جانبی} E\,ds\cos(0) + \underset{راست}{0} = 2\pi k h\int_a^r dr$$

← چون استوانه بی‌نهایت است و استوانه گوسی هم‌محورند $\vec{E}$ روی سطح گوسی ثابت اندازه است.

$$\to \varepsilon_0 E\int_{جانبی} ds = 2\pi k h(r-a) \to \varepsilon_0 E\times 2\pi r h = 2\pi k h(r-a) \to E_{شعاعی} = \frac{k(r-a)}{\varepsilon_0 r}$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

مسأله ۲. فصل ۲۵ (هودرسون)



$\vec{E}$ داخل کره کوچک (هوا) را پیدا کنید؟

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم که $E_{داخل} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \leftarrow$ $\vec{E}_+ = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$ (درون کره بزرگ)

و مشابه آن $\vec{E}' = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}'$ (درون کره کوچک)

(میدان داخل حفره کروی (هوا)) $= \vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}' = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}' = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r} - \vec{r}')$

با توجه به شکل داریم: $\vec{OO'} + \vec{r}' = \vec{r} \rightarrow \vec{OO'} = \vec{r} - \vec{r}'$

σ: $\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{OO'}$ و $\vec{OO'} = \vec{a}$ ثابت، $\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$ یکنواخت.

* پتانسیل الکتریکی: اگر بار الکتریکی q_0 در نقطه‌ای مثل A دارای انرژی پتانسیل الکتریکی U_A و در نقطه‌ی دیگری مثل B دارای انرژی پتانسیل الکتریکی U_B باشد؛ اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه A و B به صورت زیر تعریف می‌شود:

اختلاف پتانسیل الکتریکی از A تا B: $V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{q_0}$ ①

← طبق مطالب درس مکانیک:

کار نیروی پایستار: $W_{پایستار} = -\Delta U$ (تغییر انرژی پتانسیل) $= -(U_B - U_A)$

$\vec{E}$ در میدان q_0 = نیروی الکتریکی وارد بر بار $\vec{F}_{q_0} = q_0\vec{E}$ $\left(\vec{E} = \frac{\vec{F}_{q_0}}{q_0}\right)$

کار نیروی الکتریکی از A تا B: $W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}_{q_0}\cdot d\vec{l} = q_0\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$

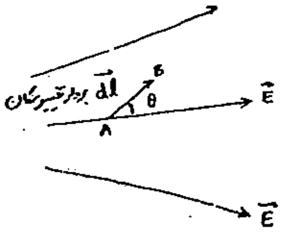
① $\rightarrow$ $V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$ ② و $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$

می‌دانیم: $\int_{V_A}^{V_B} dV = V_B - V_A \rightarrow \int_{V_A}^{V_B} dV = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \Rightarrow dV = -\vec{E}\cdot d\vec{l}$ ③

جزء کوچکی از رابطه‌ی ②

در رابطه ۳ ← dV: اختلاف پتانسیل جزئی بین دو سر $d\vec{l}$

@jozve_iut
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان



اختلاف پتانسیل A تا B : $dV = -\vec{E}\cdot\vec{dl} = -E\,dl\cos\theta$

مولفه‌ی $\vec{E}$ روی امتداد dl = E_l

$$dV = -E_l\,dl \rightarrow E_l = -\frac{dV}{dl}$$

← اگر $V = V(x,y,z)$ = تابع پتانسیل ، باشد وقتی در امتداد x حرکت کنیم ، به جای dl رابطه بالا طبق قرارداد های ریاضی باید نوشت :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

و اگر در امتداد $\vec{dl}$ در موازات y ها حرکت کنیم :

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

و اگر در امتداد $\vec{dl}$ در موازات z ها حرکت کنیم :

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

در کل خواهیم داشت : $\vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$

@jozve_iut

← پس چنانچه بتوان تابع $V(x,y,z)$ را تعیین کنیم روش سوم پیدا کردن $\vec{E}$ به صورت زیر خواهد بود :

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right) \quad (F)$$

$$V_A - V_B = \int_{A}^{B} \vec{E}\cdot\vec{dl}$$

یه یک بعدی (D)

اگر در جهت $\vec{E}$ از A به B برویم ، خواهیم داشت :

$$V_A - V_B = \int_{A}^{B} E\,dl\cos(0)$$

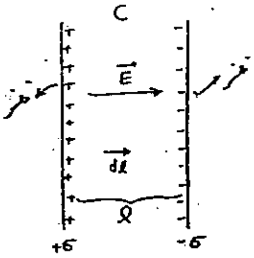
و اگر $\vec{E}$ یکنواخت ، E ثابت است

$$V_A - V_B = E\int_0^l dl = El$$

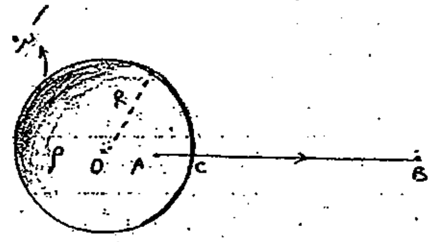
$$\rightarrow V = El$$

این رابطه برای میدان یکنواخت و در حالتی است که در امتداد $\vec{E}$ حرکت کنیم

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut



اختلاف پتانسیل دو قطب مثبت و منفی $= V = V_{+} - V_{-} = E\ell \rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$



مثال) اختلاف پتانسیل نقاط A و B را محاسبه کنید؟

برای حل مسأله و محاسبه $V_A - V_B$ ، $E_{داخل}$ و $E_{خارج}$ نیاز داریم

برای $r<R$: $\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow \varepsilon_0 \oint E\,ds \times 1 = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$

(ثابت بودن E) : $\varepsilon_0 E(4\pi r^2) = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 \rightarrow E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$ (میدان داخلی)

برای $r>R$: $\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3 \rightarrow \varepsilon_0 \times E_{خارج} \times 4\pi r^2 = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3$

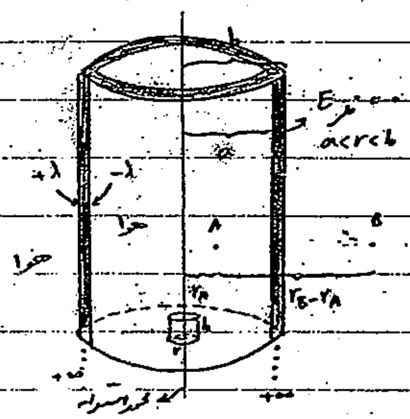
$\Rightarrow E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$ (میدان خارجی)

اگر $\overline{OA} = a$ ، $\overline{OB} = b$ (روی شعاع حرکت می‌کنیم) $(\vec{d\ell} = \vec{dr})$

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot\vec{d\ell} = \int_a^R \vec{E}_{داخل}\cdot\vec{dr} + \int_R^b \vec{E}_{خارج}\cdot\vec{dr} = \int_a^R \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{dr} + \int_R^b \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{dr}$$

$$V_A - V_B = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int_a^R r\,dr + \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\int_R^b \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\times\frac{1}{2}(R^2 - a^2) + \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{b}\right)$$

حال اگر بطور فرضی : $\rho = 0.01 \frac{c}{m^3}$ و $R = 1m$ ، $a = 0.5m$ ، $b = 2m$ باشد، در صورتی که $\frac{1}{\varepsilon_0} = 4\pi \times 9 \times 10^9$ باشد، $V_A - V_B$ را پیدا نمائید؟ 3.297×10^8



مثال) برای یک استوانه با طول بی‌نهایت، اختلاف پتانسیل بین نقاط A و B را پیدا کنید؟ (جمع جبری برای $\lambda = 0$)

برای $r<a$: $\varepsilon_0 \oint \vec{E}_{داخل}\cdot\vec{ds} = \lambda h$

برای هم محور بودن و طول بی‌نهایت و اینکه λ روی محور متقارن است:

$\vec{E}$ در خارج و داخل هر دو شعاعی است (یعنی سطح بالا و پایین قطع می‌کند)

E ← ثابت مقدار

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

$$\underset{\text{بالا}}{0} + \underset{\text{پایین}}{0} + \varepsilon_0 \int_{\text{سطح جانبی}} E_{\text{داخل}}\, ds \times 1 = \lambda h \rightarrow \varepsilon_0 E \times 2\pi r h = \lambda h \rightarrow E_{\text{داخل}} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$$

حال برای $r > R$:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \underset{\text{بار خط}}{\lambda h} - \underset{\text{روی سطح داخلی}}{\lambda h} + \underset{\text{روی سطح خارجی}}{\lambda h}$$

با دلایل فوق :

$$\underset{\text{بالا}}{0} + \underset{\text{پایین}}{0} + \varepsilon_0 \int_{\text{جانبی}} E_{\text{خارج}}\, ds \times 1 = +\lambda h \rightarrow \varepsilon_0 E_{\text{خارج}} \times 2\pi r h = \lambda h$$

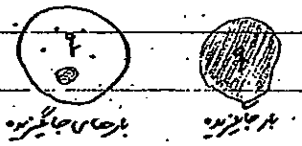
$$\rightarrow E_{\text{خارج}} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} \qquad (r > b)$$

$$* \quad V_A - V_B = \int_{(A)}^{(B)} \vec{E} \cdot \vec{dr} = \int_{r_A}^{a} \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} dr \times 1 + \int_a^b 0 \ (\text{میدان درون فلز}) + \int_b^{r_B} \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} dr \times 1$$

← اختلاف پتانسیل بین هر دو نقطه‌ای که مربوط به یک فلز باشد و در حالت الکترواستاتیک صفر است.

در ادامه : $V_A - V_B = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln\left(\frac{a}{r_A}\right) + 0 + \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \left(\frac{r_B}{b}\right) = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln\left(\frac{a r_B}{b r_A}\right)$, $(a \neq b)$

توجه : اگر بخواهیم مبنای پتانسیل بی‌نهایت است، یعنی اینکه پتانسیل همه نقاطی که بی‌نهایت از ما فاصله دارند را صفر در نظر بگیریم.



توجه : اگر بارهایی در یک ناحیه محدود باشند، به آن‌ها بارهای جایگزیده می‌گوییم. برای توزیع بارهای جایگزیده، انتخاب بی‌نهایت به عنوان مبنای پتانسیل بلااشکال است.

(۱) یعنی برای خط یا استوانه‌ای بی‌نهایت طویل. $E = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$

(۲) برای میدان حاصل از صفحه‌ی بی‌نهایت بزرگ = (برای میدان یکنواخت) $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

یعنی برای دو مثال بالا، مبنای بی‌نهایت صحیح نیست.

پس برای بارهای جایگزیده فرض می‌کنیم $V_\infty = 0$ (نقطه‌ی B در بی‌نهایت و A را هر نقطه‌ای که در نظر می‌گیریم)

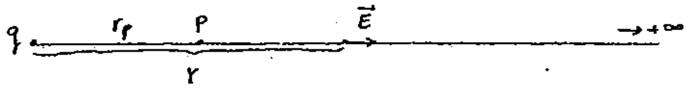
و چون : $V_B - V_A = -\int_{(A)}^{(B)} \vec{E} \cdot \vec{dl}$ (فرمول اساسی محاسبه پتانسیل)

$$\cancel{V_B} - \underset{\text{پتانسیل نقطه } P}{V_P} = -\int_{r_P}^{\infty} \vec{E} \cdot \vec{dl} \Rightarrow V_P = V = \int_{r_P}^{\infty} \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int_{\infty}^{r_P} \vec{E} \cdot \vec{dl} \quad (5)$$

فرمول ۵ برای غیر جایگزیده غلط است.

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

← برای بار نقطه‌ای q که مثبت فرض می‌کنیم، با فرمول ⑤ پتانسیل را حساب می‌کنیم:



$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}$$

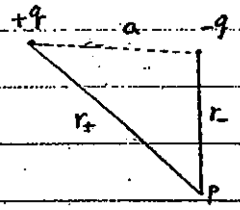
$$V = V_p = \int_{r_p}^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{r_p}^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}\, dr \times \cos(0)$$

$$V_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_p}^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)_{r_p}^{\infty} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_p}-\frac{1}{\infty}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_p} = K\frac{q}{r_p}$$

چون P می‌تواند هر یک از نقاط اطراف P باشد می‌نویسیم: $V = \dfrac{q}{4\pi\epsilon r}$

توجه: پتانسیل کمیتی اسکالر بوده و محاسبه‌ی آن ساده است.

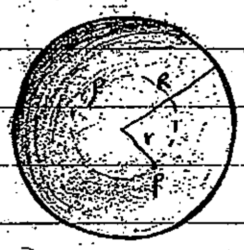
مثال) پتانسیل در نقطه‌ی P کدام است؟



$$V_P = V_P)_+ + V_P)_- = K\frac{q}{r_+} + K\frac{-q}{r_-} = Kq\left(\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}\right)$$

هدرسون ← فصل (۲۲): ۱-۶-۸-۱۲-۱۵-۱۶ فصل (۲۷): ۵-۸-۲۱-۲۴-۳۲-۴۲ (بدون کروی‌ها)

مثال) بار با چگالی حجمی یکنواخت ρ در حجم کره نارسانایی با شعاع R توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی یک نقطه‌ی داخل درون این کره را حساب کنید؟



چون حجم کره محدود است پس بارها جایگزیده‌اند و می‌توان نوشت:

$$V_p = -\int_{\infty}^{r}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{r}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$V_p = V_{r<R} = \int_{r}^{R}\vec{E}_{داخل}\cdot d\vec{r} + \int_{R}^{\infty}\vec{E}_{خارج}\cdot d\vec{r}$$

ابتدا با قانون گوس ثابت می‌کنیم:

$$\to E_{داخل} = \frac{\rho}{3\epsilon} r \quad \text{(از قبل)} \qquad E_{خارج} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon r^2}$$

$$V_{r<R} = \int_{r}^{R}\left(\frac{\rho}{3\epsilon} r\right) dr \times \cos(0) + \int_{R}^{\infty}\frac{\rho R^3}{3\epsilon r^2}\, dr \cos(0) = \frac{\rho}{3\epsilon}\times\frac{1}{2}(R^2-r^2) + \frac{\rho R^3}{3\epsilon}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\infty}\right) = \frac{\rho}{6\epsilon}(R^2-r^2+2R^2)$$

$$\to V_{داخل} = V_{r<R} = \frac{\rho}{6\epsilon}(3R^2-r^2)$$

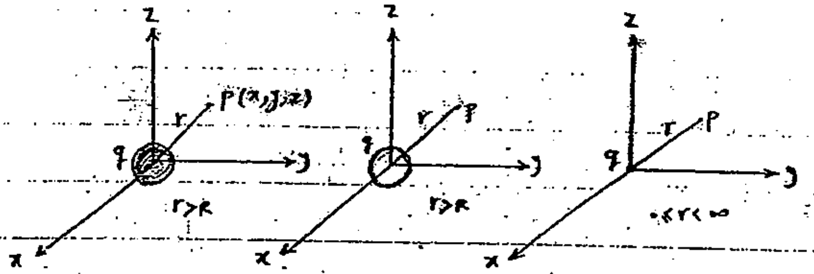
پتانسیل مرکز کره: $V_0 = V_{r=0} = \dfrac{\rho R^2}{2\epsilon}$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$V_{r>R} = \int_r^\infty \vec{E}_{out} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr \rightarrow V_{r>R} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

پتانسیل حاصل از بار نقطه‌ای در فاصله r از آن $= V = k\frac{q}{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

← ۴: مخصوص خارج کره‌ای که q یکنواخت روی سطح یا بطور یکنواخت در داخل حجم آن توزیع شده باشد.



و $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$V = V(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \times \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\rightarrow E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}(-1/2)(2x)(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$E_x = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \cdots \quad E_y = \frac{qy}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \cdots \quad E_z = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

وچون $\vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}$ خواهیم داشت:

$\vec{E}_p = \vec{E}_{\text{خارج کره}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{r^3} \rightarrow \vec{E}_{\text{خارج کره}} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ ، $\frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}$ (بردار یکه)

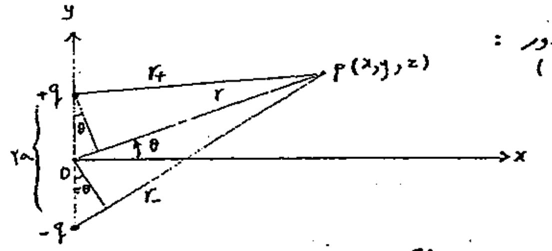
یا: $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

← از راه: $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ ، $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{dV}{dr} \rightarrow E_r = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)$

← اگر $V = V(\vec{r})$ باشد آنگاه: $\vec{E} = f\vec{r} + g\vec{\theta}$ ، $E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ برعکس هم درست می‌شود

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

میدان الکتریکی حاصل از یک دو قطبی الکتریکی در نقاط دور : $(r \gg a)$



مثلاً $a = 1\,cm$, $r = 100\,cm$

$$r_+ \simeq r - a\sin\theta \qquad r_- = r + a\sin\theta$$

$$\Rightarrow r_- - r_+ \simeq +2a\sin\theta \ , \ (r_+)(r_-) = (r - a\sin\theta)(r + a\sin\theta)$$

$$\Rightarrow r_+ r_- \simeq r^2 - a^2\sin^2\theta$$

چون : $a \ll r$ است در این صورت : $a^2\sin^2\theta < a^2 \lll r^2$

$$\rightarrow r_+ r_- \simeq r^2$$

$$V_{P_{کل}} = V_P)_{+q} + V_P)_{-q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r_+} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon r_-} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}\right)$$

$$\Rightarrow V_{P_{کل}} \simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon} \times \frac{2a\sin\theta}{r^2}$$

و چون $p = 2aq$

در نتیجه : $V(\vec{r})$ $\quad \left(V_P \simeq \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)$

$$V_{دور}(r,\theta) \simeq \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{\sin\theta}{r^2}$$

← r و θ مختصات قطبی تعیین می‌شود.

اما : $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ و $r^2 = x^2 + y^2$ است، پس :

$$V(x,y) = \frac{p}{4\pi\varepsilon} \times \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$ مربوط به نقاط دور از دو قطبی الکتریکی

$$\rightarrow E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \simeq -\frac{p}{4\pi\varepsilon}\, y \,\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)^{-3/2} = -\frac{py}{4\pi\varepsilon}\left(-\tfrac{3}{2}\right)(2x)(x^2+y^2)^{-5/2}$$

$$\Rightarrow E_x \simeq \frac{3pxy}{4\pi\varepsilon (x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$\rightarrow E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \simeq -\frac{p}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}\left(y(x^2+y^2)^{-3/2}\right) = -\frac{p}{4\pi\varepsilon}\left[1 \times (x^2+y^2)^{-3/2} - 3y^2(x^2+y^2)^{-5/2}\right]$$

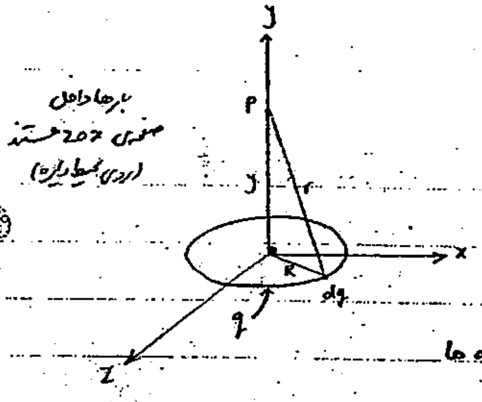
$$\Rightarrow E_y \simeq \frac{p}{4\pi\varepsilon} \times \frac{2y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

و هم چنین : $E_z = 0$

پس : $\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{(x^2+y^2)^{5/2}} \left[3xy\,\hat{i} + (2y^2 - x^2)\,\hat{j} \right]$ مخصوص نقاط دور از دو قطبی در صفحه xoy

محاسبه ی پتانسیل برای نقاط روی محور تقارن یک حلقه :

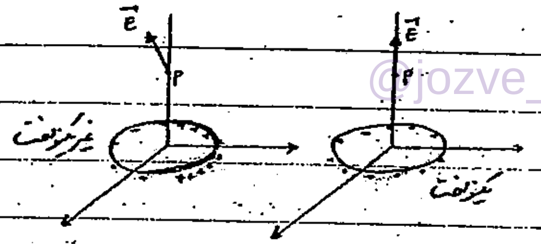


چون dq تا p فاصله ی $\sqrt{y^2+R^2}$ دارد می توان نوشت:

پتانسیل حاصل از dq در p : $dV_p = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2+y^2}}$

جمع کل dv ها : $V_p = \int_{\text{کل بار}} dv = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2+y^2}} \int_{\text{کل بار}} dq$

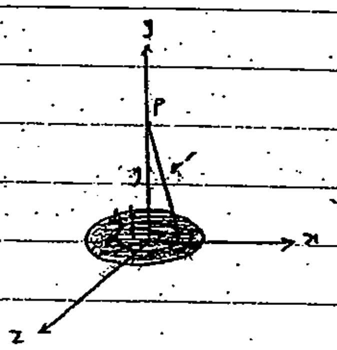
$V_p = V(y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2+y^2}}$ هم برای توزیع غیر یکنواخت صحیح است هم برای توزیع یکنواخت



حال $E_y = -\frac{d}{dy} V(y) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{d}{dy} (y^2+R^2)^{-1/2} \longrightarrow E_y = \frac{qy}{4\pi\epsilon_0 (y^2+R^2)^{3/2}}$

ولی چون V فوق تابع x نیست مشتق نسبت به x صفر است.
← به دلیل تقارن E_x برابر صفر است.

محاسبه ی پتانسیل روی محور تقارن دیسک شکل



ثابت = σ چگالی = بار واحد سطح

بار حلقه ی فرضی = $dq = \sigma \times ds = \sigma \times 2\pi r\,dr$

چون این dq تا p فاصله ی $r' = \sqrt{r^2+y^2}$ دارد خواهیم داشت:

@jozve_iut
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

پتانسیل حاصل از dq در p = $dv = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r'} \rightarrow dv = \frac{2\pi\sigma r\,dr}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+y^2}}$

پتانسیل کل نقطه‌ی p: $V = \int_{\text{کل دیسک}} dv = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_{r=0}^{r=R}(r^2+y^2)^{-1/2}\, r\,dr$ (y ثابت، r متغیر)

$\rightarrow V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(r^2+y^2)^{1/2}\Big|_0^R \Rightarrow V(y) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\sqrt{R^2+y^2}-y) \quad y>0$

$V(y) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\sqrt{R^2+y^2}+y) \quad y<0$

چون بار یکنواخت روی سطح دایره توزیع شده است و نیز محور y محور تقارن دیسک است

$E_x = E_z = 0$ و فقط E_y داریم: $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{dV}{dy}$ (یک متغیر)

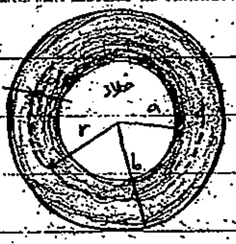
$\rightarrow E_y(y>0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{d}{dy}(y-(R^2+y^2)^{1/2}) \quad E_y = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(1-\frac{y}{\sqrt{R^2+y^2}}) \quad , y>0$

$\rightarrow E_y(y<0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{d}{dy}(y+(R^2+y^2)^{1/2}) \quad E_y = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}(1+\frac{y}{\sqrt{R^2+y^2}}) \quad , y<0$

@jozve_iut

* برای λ تابعی از فاصله یا σ تابعی از فاصله یا ρ تابعی از فاصله مشابه برخی مسائل محاسبه‌ی میدان، پتانسیل را هم می‌توان به راحتی (در صورت تقارن) بدست آورید.

مثال) بار الکتریکی با چگالی حجمی $\rho = \frac{A}{r^2}$ در پوسته‌ی کروی غیر رسانا به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b توزیع شده است. پتانسیل مرکز پوسته‌ی کروی را بدست آورید؟



بار درون پوسته نازک = $dq = \rho\,dv$ ، حجم پوسته نازک کروی: $dv = 4\pi r^2 dr$ به ضخامت dr و شعاع r

$\Rightarrow dq = \frac{A}{r^2}\times 4\pi r^2 dr = 4\pi A\,dr$ (ثابت بودن)

چون همه‌ی قسمت‌های بار جزء dq تا نقطه‌ی o یک فاصله دارند (r) داریم:

پتانسیل حاصل از پوسته نازک (dq) در نقطه‌ی o = $dv = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{4\pi A\,dr}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{A}{\epsilon_0}\frac{dr}{r}$

کل پتانسیل مرکز = $V_o = \int_{\text{کل جزء}} dv = \frac{A}{\epsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r} \rightarrow V = \frac{A}{\epsilon_0}\ln(\frac{b}{a})$

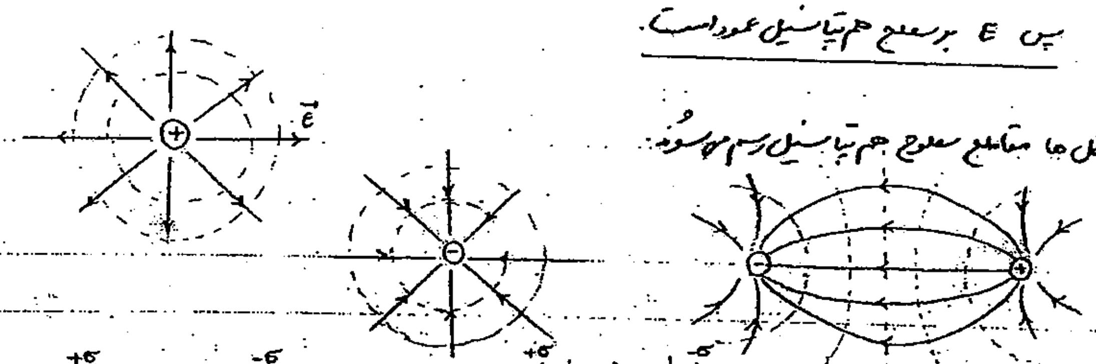
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

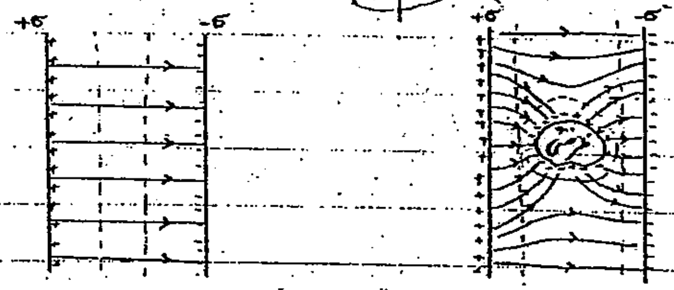
سطوح هم‌پتانسیل: با توجه به رابطه‌ی $dV = -\vec{E}\cdot\vec{dl}$ اگر دو نقطه‌ای که ابتدا و انتهای هر بردار $\vec{dl}$ اند، روی یک سطح هم‌پتانسیل باشند ← $dV = 0$

یا $\vec{E}\cdot\vec{dl} = 0$ یعنی $\vec{E}$ بر $\vec{dl}$ های روی سطح هم‌پتانسیل عمود است.

یعنی E بر سطح هم‌پتانسیل عمود است.

در شکل‌ها مقاطع سطوح هم‌پتانسیل رسم می‌شود.





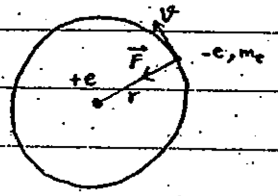
$$V_B - V_A = \frac{1}{q}(U_B - U_A)$$

برای بارهای جایگزیده مبنای پتانسیل ∞ فرض می‌شود.

اگر $V_A = V_\infty = 0$ و $U_A = U_\infty = 0$ و B یک نقطه‌ی کلی باشد: $\quad V_{-0} = \frac{U_{-0}}{q}$

$U = Vq \qquad$ شبیه: $\vec{F}_{برداری} = q\vec{E}$

یعنی بار نقطه‌ای q وقتی در ولتاژ V قرار گیرد دارای $U = qV$: انرژی پتانسیل الکتریکی است.



* در اتم بوهر که یک الکترون به دور یک پروتون دوران می‌کند

قانون دوم نیوتن: $\quad F = m\frac{V^2}{r} \Rightarrow \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m_e\frac{V^2}{r}$

$\Rightarrow$ انرژی جنبشی الکترون: $\quad K = \frac{1}{2}m_e V^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$

@jozve_iut
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

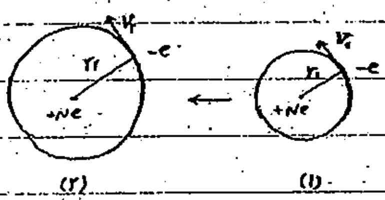
زیرا $V_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ ، انرژی پتانسیل الکترون $= U = -eV = -e\left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}\right)$

$$U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

انرژی کل الکترون = انرژی مکانیکی الکترون = $E = U + K = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

مسئله (از جانیدی) حساب کنید یک عامل خارجی چقدر باید کار انجام دهد؟ (در واقع چقدر به الکترون انرژی اضافه کنید تا شکل (۱) به شکل (۲) تبدیل شود.)



می‌دانیم: $W_{کل} = +\Delta K$ ، $W_{پایستار} = -\Delta U$ ، $W_{ناپایستار} = \Delta E$

پس: $W_{خارجی}$ = کار عامل خارجی = انرژی داده شده به الکترون = مقدار انرژی داده شده $= \Delta E = E_2 - E_1 = \left(-\frac{Ne^2}{8\pi\epsilon_0 r_2}\right) - \left(-\frac{Ne^2}{8\pi\epsilon_0 r_1}\right)$

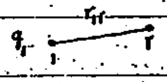
@jozve_iut

$\Rightarrow W_{عامل خارجی} = \frac{-Ne^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) > 0$ چون $r_1 < r_2$ پس کار عامل خارجی مثبت است.

تذکر: در مسأله‌ی بالا اثبات رابطه‌ی $E = \frac{-Ne^2}{8\pi\epsilon_0 r}$ مهم است.

انرژی مجموعه‌ی ساکنی از بارهای نقطه‌ای q_i (انرژی پیکربندی):

ابتدا N بار نقطه‌ای همه در بی‌نهایت اند و آن‌ها را یکی یکی به ترتیب نقاط ۱، ۲، ۳، ... و N می‌آوریم. جمع انرژی‌هایی که به آن‌ها داده‌ایم انرژی پیکربندی مجموعه می‌باشد. در هر مرحله از رابطه‌ی $U_i = q_i V_i$ استفاده می‌کنیم.



۱- ابتدا همه ذرات در بی‌نهایت اند: $V_1 = 0$

لذا برای بار q_1 انرژی $U_1 = q_1 V_1 = 0$ لازم است.

۲- با حضور q_1 پتانسیل نقطه‌ی (۲) به صورت: $V_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$ خواهد بود، لذا برای آوردن بار q_2 به ۲ باید مقدار $U_2 = q_2 V_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$ کار انجام دهیم.

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$V_3 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$$

۳- با حضور q_1 و q_2 پتانسیل ۳ بصورت روبه رو خواهد بود:

ولذا باید به q_3 مقدار $U_3 = q_3 V_3$ یا $U_3 = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$ انرژی بدهیم.

۴- به همین ترتیب: $U_4 = \frac{q_1 q_4}{4\pi\epsilon_0 r_{14}} + \frac{q_2 q_4}{4\pi\epsilon_0 r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{4\pi\epsilon_0 r_{34}}$

(۲) و در حالت کلی: $U_{\text{پیکربندی}} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,\, i\neq j}^{n} U_{ij}$

توجه: اگر $\frac{1}{2}$ را در نظر نگیرید، مثل این است که انرژی خازن را بصورت $q V = \frac{q^2}{C} = U$ بنویسیم $U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$

محاسبه ظرفیت الکتریکی خازن ها:

هر دو تکه جسم منزوی جدا از هم می تواند قطب های یک خازن را تشکیل دهد. اما محاسبه ظرفیت با روش تئوری فقط برای خازن مسطح و موازی و با فاصله کم و سطوح بزرگ، خازن کروی هم مرکز و نیز استوانه ای طویل هم محور امکان پذیر است.

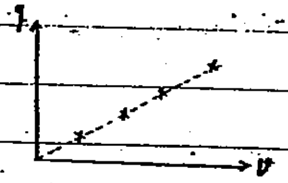
در شکل روبرو، پس از اتصال کلید، اگر مقاومت سیم های رابط ناچیز باشد، خیلی سریع بار جابجا شده و خازن شارژ می شود.

بین پلاک ها $I=0$ می گردد.

جهت تعریف: $C = \frac{+q}{V_C}$ ظرفیت الکتریکی خازن گفته می شود. C از q و V مستقل است.

با روش تجربی (آزمایشگاهی) برای هر خازن، با افزایش دادن V مقادیر q را پیدا کرده و سپس C را بدست می آوریم.

$q = CV$ رابطه خطی



ضریب زاویه خط برابر با ظرفیت خازن است.

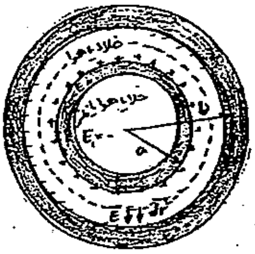
۲- اما از راه تئوری معمولاً با قانون گوس $\vec{E}$ برای سه نوع خازن فوق را پیدا کرده و سپس از رابطه زیر استفاده می کنیم.

$V = |\Delta V| = \int_{\oplus}^{\ominus} \vec{E}\cdot d\vec{l} > 0$, $V = \left|\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}\right|$

که A روی یک قطب و B روی قطب دیگر است.

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

۱ـ محاسبه‌ی ظرفیت خازن کروی هم مرکز:



برای $r<a$ داریم $E_1=0$ ، برای $r>b$ داریم $E_r=0$

و برای $a<r<b$ داریم:

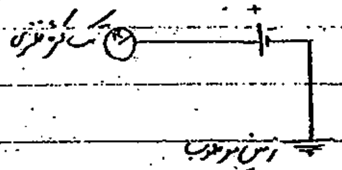
$$\varepsilon_0 \oint \vec{E_r}\cdot\vec{ds} = +q \Rightarrow \varepsilon_0 E_r \times 4\pi r^2 = q$$

$$\rightarrow E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad , \quad a \le r \le b$$

اختلاف پتانسیل بین دو کره‌ی فلزی $= V_c = V_{a-b} = \int_a^b \vec{E_r}\cdot\vec{dr} = \int_a^b E_r\, dr \times \cos(0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2}$

$$\Rightarrow V_c = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \Rightarrow C = \frac{q}{V_c} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

مثال) ظرفیت یک کره‌ی فلزی را با توجه به شکل روبرو محاسبه کنید؟



اگر در رابطه‌ی ظرفیت خازن کروی هم مرکز فرض شود: $a=R,\ b=\infty$

$$\Rightarrow C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\infty}\right)} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

@jozve_iut

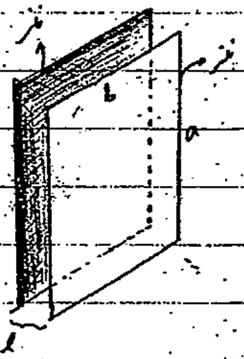
مثال) شعاع کره‌ی فوق را طوری تعیین کنید که ظرفیت این تک کره برابر با یک فاراد باشد؟

$$R = \frac{C}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times C = K\times C = 9\times10^9\times(1) = 9\times10^9\ m$$

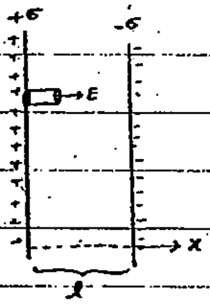
عملاً چنین خازن کروی نمی‌توان داشت.

پس به طور کلی ظرفیت 1F ، ظرفیت بسیار بسیار بزرگی است و به همین علت در مسائل از ظرفیت‌های عملی که حدود چند میکروفاراد µF است استفاده می‌شود.

۲ـ محاسبه‌ی ظرفیت خازن مسطح:



برای اینکه $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ تقریباً صحیح باشد باید $l \ll a, b$



$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \sigma S$$

$$\varepsilon_0 E S = \sigma S \rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$V_c = \int_{\oplus}^{\ominus} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_0^{l} E\,dx \times 1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(l-0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} l \longrightarrow V_c = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} l$$

$\rightarrow \left(c = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\right)$ کره‌ای ↗

$C = \frac{q}{V_c} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} l} \Rightarrow C = \varepsilon_0 \frac{S}{l}$ $\quad l \ll \sqrt{S}$ تقریباً صحیح است

مثال: اگر $l = 1mm$ باشد، سطح S را طوری بدست آورید که $C = 1F$ شود؟

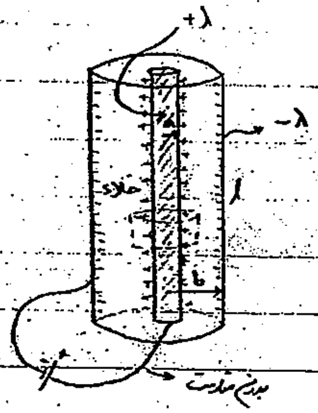
$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{l} \longrightarrow 1 = \varepsilon_0 \times \frac{S}{1mm} \Rightarrow S = \frac{10^{-3}}{8.859\times10^{-12}} = 1.125\times 10^{8}\ m^2$$

۳_ محاسبه‌ی ظرفیت خازن استوانه هم محور و طویل:

$l \gg a, b$

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \lambda h \xrightarrow{\text{بالا و پایین}} 0+0+\varepsilon_0 E \times 2\pi r h = \lambda h$$

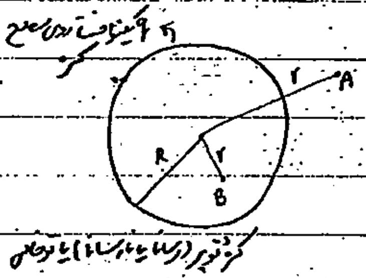
$$\Rightarrow E_{\text{بین دو استوانه}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



$$V_c = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_a^b E\,dr\times1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln(b)-\ln(a)) \longrightarrow V_c = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

چون $C = \frac{q}{V} \longrightarrow C = \frac{l\lambda}{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(b/a)} \longrightarrow C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(b/a)}$



$$E_{r<R} = 0 \quad \text{و} \quad E_{r>R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

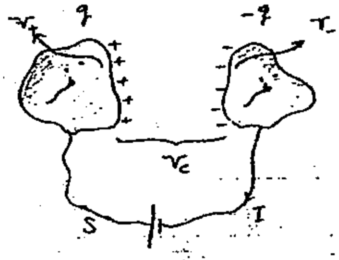
$$V_A = V_{r>R} = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr\times 1 \Rightarrow V_{r>R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$ خارج یا روی سطح کره

$$V_B = V_{r<R} = \int_r^R (0) + \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr\times1 \Rightarrow V_{r\le R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

← نقاط داخل هم پتانسیل اند.

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

نکته) در واقع کره‌ی a که شعاع انحنای کمتری دارد (نوک تیزتر است) فشردگی توزیع بار روی آن زیادتر است.



اثبات رابطه‌ی $u = \frac{1}{2}\frac{q^2}{c}$ برای خازن:

$V_c = \frac{q}{c}$: اختلاف پتانسیل دو سر خازن ، $c = \frac{q}{V_c}$

وقتی بار نقطه‌ای (جزئی) dq در پتانسیل V_- باشد دارای انرژی dqV_- و وقتی به V_+ می‌رسد انرژی آن dqV_+ شده است.

پس باتری به آن مقدار $du = dqV_+ - dqV_-$ انرژی داده است.

$$du = dq(V_+ - V_-) \rightarrow du = (dq)V_c = (dq)\frac{q}{c}$$

$du = \frac{1}{c}q\,dq$: انرژی جزئی داده شده به خازن (توسط باتری)

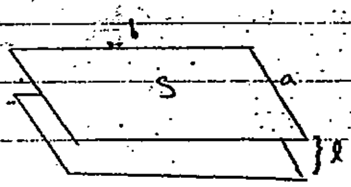
$u = \int_0^q du = \frac{1}{c}\int_0^q q\,dq$: انرژی کل خازن وقتی بار آن از صفر به q می‌رسد

@jozve_iut

$$u_{\text{انرژی خازن}} = \frac{q^2}{2c}$$

$u = \frac{1}{2}cV_c^2$ یا $u = \frac{1}{2}qV_c$

محاسبه‌ی انرژی واحد حجم (در یک خازن مسطح نسبتاً ایده‌آل)



$l \ll a, b$

تقریباً صحیح است: $c = \varepsilon_0 \frac{ab}{l}$

$u = \frac{1}{2}cV_c^2$: انرژی خازن

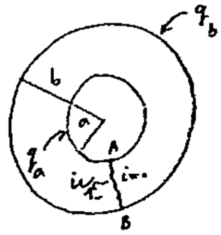
حجم قسمتی که میدان الکتریکی مخالف صفر است: $V = Sl$ ، حجم خازن

چون هم جای داخل خازن ایده‌آل بوده، میدان یکنواخت خواهد بود:

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$: ثابت است و جهت آن به طور ثابت از (+) به (−)

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

* دو پوسته کروی فلزی و هم مرکز داخلی به شعاع a و بار q_a و خارجی به شعاع b و بار q_b.



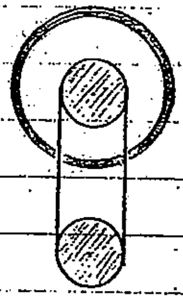
← چون $i=0$ است می‌بایست $V_A = V_B$ باشد.

$$V_A)_{q_a} + V_A)_{q_b} = V_B)_{q_a} + V_B)_{q_b}$$

$$\rightarrow \frac{q_a}{4\pi\varepsilon a} + \frac{q_b}{4\pi\varepsilon b} = \frac{q_a}{4\pi\varepsilon b} + \frac{q_b}{4\pi\varepsilon b} \rightarrow \frac{q_a}{a} = \frac{q_a}{b}$$

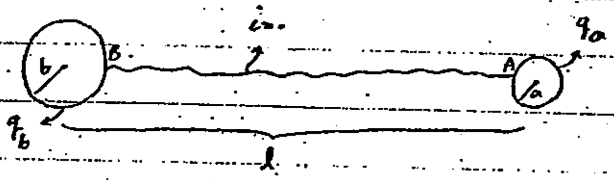
چون $a \neq b$ است (یعنی $b \neq a$) آنگاه باید $q_a = 0$ باشد.

← و این نتیجه ($q_a = 0$) در حالت الکترواستاتیک (قبلاً) با قانون گوس هم حاصل شد.
بار یک فلز روی سطح خارجی آن توزیع می‌شود.



توجه: در دستگاه وان‌دوگراف: با چرخش پیدا کردن تسمه، بار زیادی روی سطح ایجاد خواهد شد و با افزایش q_b، $V_b = \frac{q_b}{4\pi\varepsilon b}$ نیز افزایش پیدا خواهد کرد.

@jozve_iut



در این جا: $l \gg a, b$

$$i=0 \rightarrow V_A = V_B$$

$$V_B)_{q_a} + V_B)_{q_b} = V_A)_{q_a} + V_A)_{q_b}$$

در ادامه: $\frac{q_a}{4\pi\varepsilon_0 l} + \frac{q_b}{4\pi\varepsilon b} \approx \frac{q_a}{4\pi\varepsilon a} + \frac{q_b}{4\pi\varepsilon l}$

چون l بسیار بزرگ است: در کسرهایی که در مخرج دارای l می‌باشند بسیار کوچک خواهند بود: $\frac{q_b}{b} \approx \frac{q_a}{a}$

اما $q_b = \sigma_b \times 4\pi b^2$ ، $q_a \approx \sigma_a \times 4\pi a^2$

در نتیجه: $\frac{1}{b}(\sigma_b \times 4\pi b^2) \approx \frac{1}{a}(\sigma_a \times 4\pi a^2) \rightarrow b\sigma_b \approx a\sigma_a$

← و چون $b > a$ است در این صورت: $\sigma_b < \sigma_a$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

می‌توان نوشت:

$$\text{انرژی واحد حجم}:\quad u_E = \frac{u}{V} = \frac{\frac{1}{2}CV_c^2}{S\ell} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{\ell}\times\frac{V_c^2}{S\ell} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V_c}{\ell}\right)^2$$

و چون $\vec{E}$ یکنواخت است:

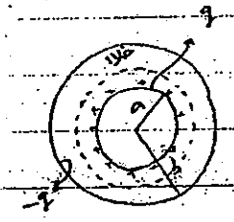
$$V_c = \int_0^\ell \vec{E}\cdot\vec{d\ell} = \int_0^\ell E\,d\ell = E\int_0^\ell d\ell = E\ell \longrightarrow E = \frac{V_c}{\ell}$$

$$\text{انرژی الکتریکی در واحد حجم}\quad u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

البته بعداً در الکترومغناطیس به کمک ریاضیات بالاتر ثابت می‌شود که برای میدان‌های غیر یکنواخت هم:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

تحقیق صحت رابطه‌ی « $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ » برای خازن کروی:



برای $a<r<b$:

$$\varepsilon_0\oint_{\text{سطح}}\vec{E}\cdot\vec{ds} = q$$

$$\varepsilon_0 E\times 4\pi r^2 = q \longrightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\text{انرژی واحد حجم بین دو قطب خازن کروی هم‌مرکز} = u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}\quad,\quad a<r<b$$

و چون برای هر خازنی $u = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ است آنگاه:

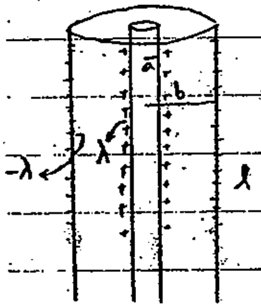
$$C = \frac{q^2}{2u} = \frac{q^2}{2}\times\frac{1}{\int_a^b u_E\,dv} \longrightarrow C = \frac{q^2}{2}\times\left(\int_a^b \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}\times(4\pi r^2 dr)\right)^{-1}$$

(انرژی واحد حجم در ... ؛ حجم جزء کره)

$$C = 4\pi\varepsilon_0\times\frac{1}{\int_a^b \frac{dr}{r^2}} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$$

چون C جواب صحیح است پس $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ (برای این میدان) هم درست است.

تحقیق صحت رابطه‌ی « $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ » برای خازن استوانه‌ای:



$$\text{با قانون گوس}:\quad E_{a<r<b} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)^2$$

$$\text{انرژی کل}:\quad u = \int_a^b u_E\,dv = \int_a^b \frac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_0 r^2}(2\pi r\ell\,dr)$$

$$u = \frac{\lambda^2\ell}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b\frac{dr}{r} = \frac{\lambda^2\ell}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\quad,\quad u = \frac{(\lambda\ell)^2}{4\pi\varepsilon_0\ell/\ln(b/a)}$$

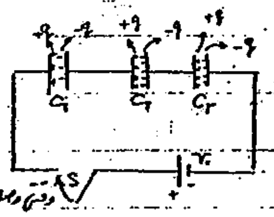
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

اما ۹-۲-۱ : $u = \frac{1}{2}\times\frac{q^2}{\frac{2\pi\epsilon l}{\ln(b/a)}}$ و چون قبلاً ظرفیت خازن به صورت $C=\frac{2\pi\epsilon l}{\ln(b/a)}$ بود:

پس: رابطه صحیح $u=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ که مربوط به هر خازنی است. همین برای میدان درون این خازن هم $u_E=\frac{1}{2}\epsilon E^2$ درست است.

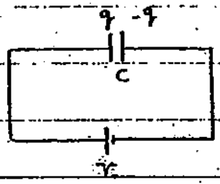
ترکیب خازن ها:

الف - ترکیب سری (ابتدا همه ی خازن ها بدون بار هستند)



وجود بارهای + و - به طور القائی (غیرمستقیم توسط باتری) به صورت پی در پی است.

انرژی کل سه خازن: $u_{کل} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_1}+\frac{1}{2}\frac{q^2}{C_2}+\frac{1}{2}\frac{q^2}{C_3}$



$u_{خازن معادل} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$

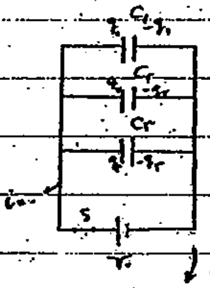
اگر خازن C معادل با ترکیب C_1 و C_2 و C_3 فوق باشد باید: $u_{ترکیب خازن ها} = u_{خازن معادل}$

پس: $\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2}\frac{q^2}{C_i}$

پس برای خازن های سری: $\frac{1}{C}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}$

یا: $V_{0\,معادل}=\frac{q}{C}$ و $V_{0\,ترکیب} = V_{C_1}+V_{C_2}+V_{C_3} = \frac{q}{C_1}+\frac{q}{C_2}+\frac{q}{C_3} \Rightarrow \frac{1}{C}=\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{C_i}$

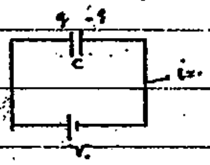
ب - ترکیب موازی (ابتدا همه ی خازن ها بدون بار هستند)



$u_{معادل} = u_{ترکیب}$

$\frac{1}{2}C_1V_0^2+\frac{1}{2}C_2V_0^2+\frac{1}{2}C_3V_0^2=\frac{1}{2}CV_0^2$

پس ← $C=\sum_{i=1}^{N}C_i$



$C=C_1+C_2+C_3 \rightarrow CV_0 = C_1V_0+C_2V_0+C_3V_0$

بار خازن معادل: $q=q_1+q_2+q_3$

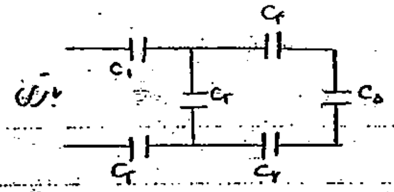
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

در سایر ترکیب ها هم همواره:

۱- $U_{\text{معادل}} = \sum_{i=1}^{n} U_i$

۲- بارهایی که مستقیما توسط باتری جابجا می‌شود در ترکیب و در معادل برابر باشند.

ج- حالتی که می‌توان از فرمول های سری و موازی استفاده کرد.



از خازن هایی که از باتری دور هستند شروع می‌کنیم و به کمک فرمول های سری و موازی به نتیجه می‌رسیم.

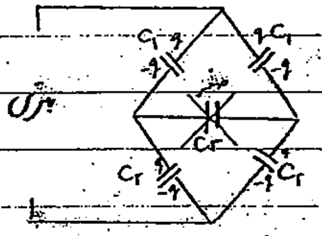
$C_4, C_5, C_6 \to$ سری

اگر معادل آن ها C'_4 باشد: $\frac{1}{C'_4}=\frac{1}{C_4}+\frac{1}{C_5}+\frac{1}{C_6}$ و C'_4 بدست می‌آید

اگر C''_4 معادل C'_4 و C_3 باشد: $C''_4 = C_3 + C'_4$ ← معلوم

$C \Rightarrow \frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C''_4}$

د- حالتی کلی تر ولی تقارن دار:



چون خازن C_3 شارژ نمی‌شود (بدلیل تقارن) می‌توان آن را حذف نمود. پس C_1 و C_2 در هر طرف سری خواهند بود.

$\frac{1}{C'}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}$, $C'=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$ $\Rightarrow$ C' و C' موازی: $C_{eq}=\frac{2C_1C_2}{C_1+C_2}$

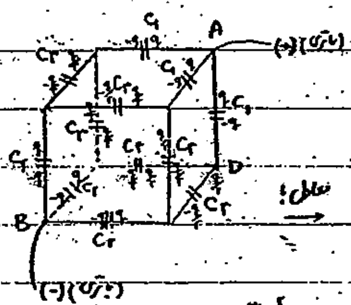
معادل با:

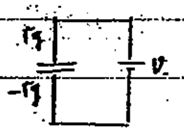
$U_{\text{معادل}}=\sum U_{\text{ترکیب}} \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{(2q)^2}{C}=2\times\frac{1}{2}\frac{q^2}{C_1}+2\times\frac{1}{2}\frac{q^2}{C_2}+0$

$\rightarrow \frac{2q^2}{C}=\frac{q^2}{C_1}+\frac{q^2}{C_2} \Rightarrow C=\frac{2C_1C_2}{C_1+C_2}$

مثال دیگری از حالت تقارنی:

پایستگی بار در نقطه D قبل از اتصال برقرار است



معادل: 

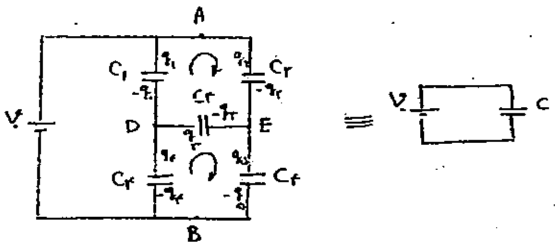
$U_{\text{معادل}}=\sum_{i=1}^{n} U_i$

$\rightarrow \frac{1}{2}\frac{(2q)^2}{C}=2\times\frac{1}{2}\frac{q^2}{C_1}+2\times\frac{1}{2}\frac{q^2}{C_2}+6\times\frac{1}{2}\frac{(q/2)^2}{C_3} \rightarrow \frac{4}{C}=2\times\frac{1}{C_1}+2\times\frac{1}{C_2}+\frac{6}{4}\times\frac{1}{C_3} \rightarrow$

C: معلوم

@jozve_iut
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

هـ) حالت کلی:



علامت q_3 بطور فرضی است (دراینجا)

شرط بارها: نقطه‌ی «A»: $q_1 + q_2 = q$ ①

نقطه‌ی «B»: $-q_4 - q_5 = -q$ ①'

شرط پایستگی بار: نقطه‌ی «D»: $-q_1 + q_3 + q_4 = 0$ ②

نقطه‌ی «E»: $-q_2 - q_3 + q_5 = 0$ ③

با جمع روابط ۱ و ۱': $q_1 + q_2 = q_4 + q_5$ و با جمع روابط ۲ و ۳: $q_1 + q_2 = q_4 + q_5$

پس چهار رابطه‌ی فوق مستقل از هم نیستند. (رابطه‌ی ۱' را حذف می‌کنیم)

در هر حلقه‌ی بسته‌ای از هر مدار جمع پتانسیل‌ها صفر است.

(حلقه‌ی بالایی): $\frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} = 0$ ④

(حلقه‌ی پایینی): $-\frac{q_3}{C_3} - \frac{q_4}{C_4} + \frac{q_5}{C_5} = 0$ ⑤

$$q_1 = \frac{\begin{vmatrix} q & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_3} & \frac{1}{C_4} & \frac{1}{C_5} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_3} & \frac{1}{C_4} & \frac{1}{C_5} \end{vmatrix}} = \dots = \alpha q$$

(یک عدد)

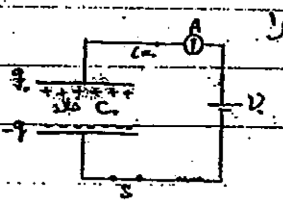
همین ترتیب: $q_2 = \beta q$ ، $q_3 = \gamma q$ ، $q_4 = \sigma q$ ، $q_5 = \lambda q$

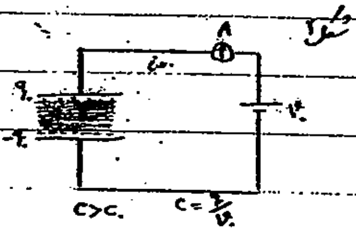
اکنون در رابطه‌ی $U_{کل} = \sum_{i=1}^{5} U_i$ قرار می‌دهیم:

با حذف $\frac{1}{2}$ ها: $\frac{q^2}{C} = \frac{\alpha^2 q^2}{C_1} + \frac{\beta^2 q^2}{C_2} + \frac{\gamma^2 q^2}{C_3} + \frac{\sigma^2 q^2}{C_4} + \frac{\lambda^2 q^2}{C_5} \rightarrow C = \dots$ (برحسب C_i ها معلوم)

تأثیر عایق در ظرفیت یک خازن: برای خازن مسطح ظرفیت $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$ (مربوط به خلاء) مربوط به وقتی است که درون حجم خازن خلاء باشد. (برای هوا با فشار معمولی هم تقریباً رابطه‌ی $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$ صحیح است)

آزمایش نشان می‌دهد که با ورود هر جسمی (دی‌الکتریک) به حجم خازن، بارهای آن زیاد می‌شود (با ثابت ماندن V) پس ظرفیت زیاد می‌شود.





@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

با ورود عایق به داخل خازن در همان جهت قبل جریان برقرار می‌شود. (یعنی ظرفیت زیاد می‌گردد)

با توجه به جهت جریان بدیهی است که: $q > q_0$

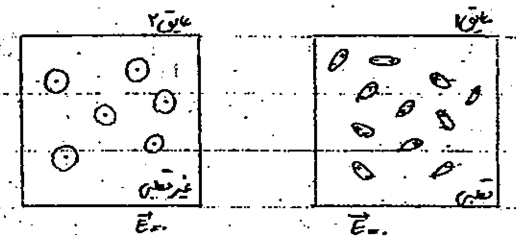
چون $V_{C_1} = V_{C_2} = V$ و $q > q_0$ پس: $C > C_0$

* تعریف K برای عایق مورد نظر بصورت زیر است:

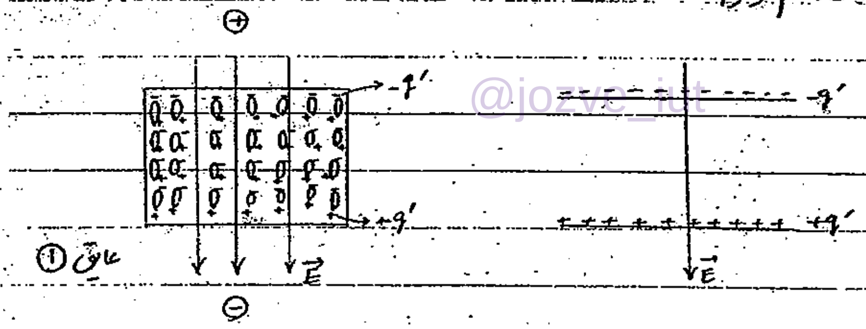
اگر همه‌ی حجم خازن که ابتدا خلاء بوده است توسط عایق مورد نظر اشغال شده باشد

$K = \frac{C}{C_0}$ (مثلاً K مربوط به چوب)

مواد یا دارای مولکول‌های قطبی اند یا غیر قطبی:

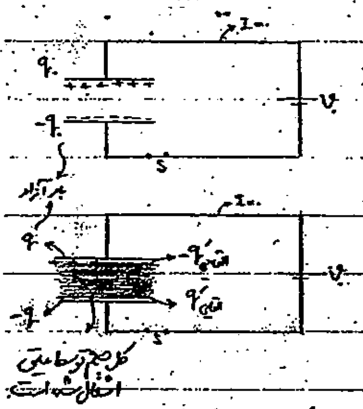


* در میدان الکتریکی $\vec{E}\neq 0$ به مولکول‌های عایق ۱ گشتاور $\vec{\tau} = \vec{P}\times\vec{E}$ وارد شده و دوران کرده و منظم می‌شوند. (هرچه $\vec{E}$ بیشتر باشد نظم مولکولها بیشتر می‌شود)



در عایق ۲ هم مولکول‌ها به صورت ⊕ در می‌آیند.

در غیر قطبی‌ها در مقابل E مخالف و قطبی می‌شوند



$q_0 = C_0 V$

$K = \frac{C}{C_0} \to K = \frac{CV}{C_0 V} \to K = \frac{q}{q_0}$ یا $q_0 = \frac{q}{K}$

$q = CV$ = بار مقابل خازن (۱)

$q > q_0 \to K > 1$ و $K_{خلاء} = 1$

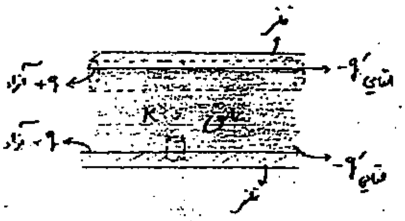
$K_{هوای خشک} = 1/...1 \approx 1$

چون برای دو شکل فوق $V_{C_1} = V_{C_2} = V$ و $d_1 = d_2 = d$ (فاصله‌ی دو قطب خازن) در شکل ۱ و ۲ کوچکترین تفاوتی ندارد لذا باید $q - q' = q_0$ (اثبات در فصل) باشد.

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$q - q' = \frac{q}{K} \longrightarrow q' = q\left(1 - \frac{1}{K}\right) \quad (۳۴)$$

چون $K > 1$ در نتیجه $q' < q$ خواهد بود. فقط برای خلاء که $K = 1$ است، $q' = 0$ می باشد.



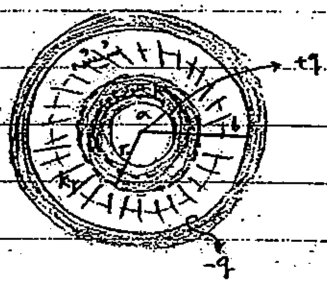
* سطح گوسی بسته که طبق نرم اصلی قضیه ی گوس برای کل آن داریم:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \text{جمع بارهای داخل سطح گوسی} = +q - q' = q - q\left(1 - \frac{1}{K}\right) = \frac{q}{K}$$

به همین علت در کتاب های الکترومغناطیس برای عایق ها قانون گوس به صورت $\varepsilon_0 \oint K \vec{E} \cdot \vec{ds} = q$ (فقط بارهای آزاد) آمده است.

در این رابطه چون سمت چپ در K ضرب شده است، سمت راست فقط جمع بارهای آزاد خواهد بود.

مثال) خازن کروی با دو عایق K_1 و K_2. ظرفیت خازن (C) را بیابید؟



برای $a < r < r_0$ که در ناحیه ی چپ (K_1) است داریم:

$$\varepsilon_0 K_1 \oint \vec{E_1} \cdot \vec{ds} = q \quad (\text{بار آزاد داخل سطح گوسی})$$

$$\varepsilon_0 K_1 \oint E_1 \, ds \cos(0) = q \qquad (\vec{E} \text{ با } \vec{ds} \text{ هم جهت و هم مرز است})$$

$$\varepsilon_0 K_1 E_1 \times 4\pi r^2 = q \;,\; E_1 = \frac{q}{4\pi K_1 \varepsilon_0 r^2} \;,\; a < r < r_0 \longrightarrow E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}$$

برای $r_0 < r < b$ هم:

$$\varepsilon_0 K_2 \oint \vec{E_2} \cdot \vec{ds} = q \longrightarrow \dots \longrightarrow E_2 = \frac{q}{4\pi K_2 \varepsilon_0 r^2} \;,\; r_0 < r < b$$

روش اول: $$C = \frac{1}{2}\frac{q^2}{U} = \frac{q^2}{2\left(\int_a^{r_0} u_{E_1} \times 4\pi r^2 dr + \int_{r_0}^{b} u_{E_2} \times 4\pi r^2 dr\right)} = \dots$$

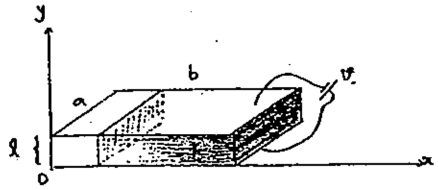
$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2} K \varepsilon_0 E^2$$ (در عایق ها باید نوشت)

روش دوم: $$C = \frac{q}{V_{ab}} = \frac{q}{\int_a^{r_0} E_1 dr + \int_{r_0}^{b} E_2 dr} \rightarrow C = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\varepsilon_1}\int_a^{r_0}\frac{dr}{r^2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_2}\int_{r_0}^{b}\frac{dr}{r^2}} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{K_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_0}\right) + \frac{1}{K_2}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{b}\right)}$$

$$K_1 = K_2 = 1 \; (\text{خلاء}) \longrightarrow C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

مثال) ظرفیت خازن را پیدا کنید بطوری که $K=1+\alpha x$ ؟



$K_{min}=1$ ، $K_{max}=1+\alpha b$ $\qquad a, b >> \ell$

اختلاف پتانسیل هر نقطه از قطب پایینی با هر نقطه از بالا برابر V_0 است.

$$\Rightarrow V_0 = E\ell \rightarrow E=\frac{V_0}{\ell}$$

انرژی واحد حجم: $u_E=\frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} K\epsilon_0 \left(\frac{V_0}{\ell}\right)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{V_0^2}{\ell^2}(1+\alpha x)$

انرژی کل $= U = \int_{\text{کل حجم}} u_E\, dv = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{V_0^2}{\ell^2}(1+\alpha x)\, dv$

dv، حجم جزئی که فاصله‌ی معادل آن از صفحه‌ی yz برابر x است:

$$dv=(a\ell)\,dx$$

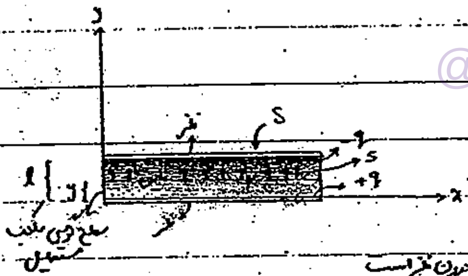
پس: $U=\frac{1}{2}\epsilon_0\frac{V_0^2}{\ell^2}\times a\ell\int_0^b(1+\alpha x)\,dx = \frac{1}{2}\epsilon_0\frac{aV_0^2}{\ell}\left[(b-0)+\frac{1}{2}\alpha(b^2-0^2)\right]$

$$\rightarrow U=\frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 ab}{\ell}\left(1+\frac{\alpha b}{2}\right)V_0^2 = \frac{1}{2} CV_0^2 \rightarrow (ab=S):\quad C=\frac{\epsilon_0 S}{\ell}\left(1+\frac{\alpha b}{2}\right)$$

در حالت خاص $\alpha=0$ که همان حجم خازن خلأ است: $C=\frac{\epsilon_0 S}{\ell}$

مثال) ظرفیت خازن را پیدا کنید بطوری که $K=1+\beta y$ ؟

$\beta>0$ و ϵ کمیت ثابت است. $\ell<\sqrt{S}$



با گذاردن سطح گوسی: $\epsilon_0\oint K\vec{E}\cdot d\vec{s} = q$

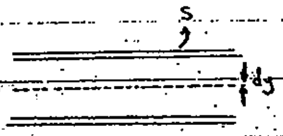
$$\rightarrow \epsilon_0\left(\underset{\text{چپ}}{0}+\underset{\text{راست}}{0}+\underset{\text{جلو}}{0}+\underset{\text{عقب}}{0}+\underset{\text{پایین}}{0}+(1+\beta y)ES\right)=q \rightarrow E=\frac{q}{\epsilon_0 S(1+\beta y)}$$

(بدون شار است)

$$E_{min}=\frac{q}{S\epsilon_0(1+\ell\beta)} \quad , \quad E_{max}=\frac{q}{\epsilon_0 S(1)}$$

پس در جهت محور y ها در بین آرماتورها میدان کاهش می‌یابد.

$$u_E=\frac{1}{2} K\epsilon_0E^2 \rightarrow u_E=\frac{1}{2}(1+\beta y)\epsilon_0\frac{q^2}{\epsilon_0^2S^2(1+\beta y)^2}=\frac{q^2}{2\epsilon_0S^2(1+\beta y)} \quad , \quad dv=S\,dy$$



$$U=\int_{y=0}^{\ell}u_E\, dv=\int\frac{q^2}{2\epsilon_0S^2(1+\beta y)}S\,dy \rightarrow U=\frac{q^2}{2\epsilon_0S\beta}\int_0^\ell\frac{\beta\, dy}{1+\beta y}$$

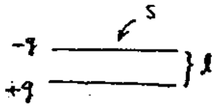
$$\rightarrow U=\frac{q^2}{2\epsilon_0S\beta}\left[\ln(1+\beta y)\Big|_0^\ell\right]\rightarrow U=\frac{1}{2}\frac{q^2}{\epsilon_0S\beta}\left[\ln(1+\beta\ell)-\ln(1)\right]=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

$$\rightarrow C=\frac{\epsilon_0S\beta}{\ln(1+\beta\ell)}$$

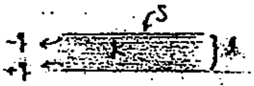
$\lim_{\beta\to0}\epsilon_0\frac{S\beta}{\ln(1+\beta\ell)} \overset{\text{Hop}}{=} \frac{1}{\frac{\ell}{1+\beta\ell}}\Big|_0 = \frac{1}{\ell} \overset{\epsilon_0 S}{\longrightarrow}$ پس خلاء: $C=\epsilon_0\frac{S}{\ell}$ $\qquad$ در $\beta=0$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

مثال) خازن مسطح با ظرفیت $C_0=\varepsilon_0 \frac{S}{d}$ که درون آن خلاء است را با بار q در نظر گرفته. سپس حجم خازن را با عایقی با ثابت دی‌الکتریک K پر کرده و در همان حالت می‌گذاریم. اتلاف انرژی خازنی که دارای دی‌الکتریک است را بدست آورید؟ (بعد از شارژ، باتری قطع شده است) (SI)



حالت اول: چون باتری قطع است، q ثابت می‌ماند: $\quad U_1=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C_0}$



حالت دوم: $\varepsilon=K\varepsilon_0 \longrightarrow C=\varepsilon\frac{S}{d}=K\varepsilon_0\frac{S}{d}=KC_0$

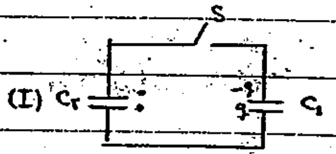
$$U_2=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{q^2}{KC_0}=\frac{1}{K}U_1<U_1$$

مقدار انرژی که به سایر انواع انرژی تبدیل شده است $=|\Delta U|=U_1-U_2=\frac{q^2}{2C_0}\left(1-\frac{1}{K}\right)\neq 0$.

قسمتی از این انرژی صرف تغییر مرکزی دی‌الکتریک شده است.

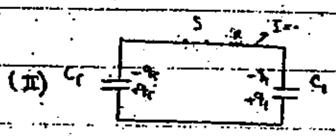
* انرژی از نوع $\frac{q^2}{2C}$ را پایسته نیست. (یعنی راجع به پایستگی انرژی در این حالت درست است). پس به همین دلیل در بالا $|\Delta U|\neq 0$.

مثال:



$(I):\quad U_I=U_{C_1}+U_{C_2}=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C_1}+0 \longrightarrow U_I=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C_1}$

اما پس از اتصال کلید S:



$(II):\quad q_1+q_2=q \quad (1)$ پایستگی بار

چون $I=0$ است، پس: $\quad V_1=V_2 \longrightarrow \frac{q_1}{C_1}=\frac{q_2}{C_2} \quad (2)$

(1) و (2) ← دو معادله و دو مجهول q_1 و q_2 به دست می‌آیند:

$$q_1=\frac{C_1 q}{C_1+C_2} \quad , \quad q_2=\frac{C_2 q}{C_1+C_2}$$

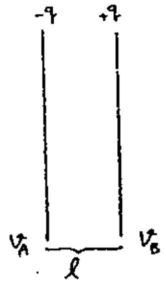
$$U_{II}=\frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C_1}+\frac{1}{2}\frac{q_2^2}{C_2} \Rightarrow U_{II}=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C_1+C_2}<U_I$$

مقدار انرژی که به سایر انواع انرژی تبدیل شده است: $|\Delta U|=U_I-U_{II}=\frac{1}{2}q^2\left(\frac{1}{C_1}-\frac{1}{C_1+C_2}\right)=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C_1}\frac{C_2}{C_1+C_2}$

قسمتی از این انرژی صرف جرقه‌زدن در موقع اتصال و قسمتی هم صرف گرم شدن سیم‌ها (اثر ژول) می‌شود.

@jozve_iut
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

مسائل ۱ فصل ۲۶:



$V_c = \Delta V = V_B - V_A = 12$ ولت

یک الکترون در قطب منفی از حال سکون به سمت قطب مثبت به حرکت در می‌آید. تندی آن در لحظه‌ی برخورد به قطب مثبت چقدر است؟

چون نیروی الکتریکی پایستار است، داریم:

$E_A = U_A + K_A = U_B + K_B =$ ثابت ، $q = -e$

$-eV_A + 0 = -eV_B + \frac{1}{2} m_e v_B^2 \rightarrow e(V_B - V_A) = \frac{1}{2} m_e v_B^2$ سرعت

$1.6\times10^{-19}\times 12$ ولت $= \frac{1}{2} \times 9.11\times10^{-31}\times v_B^2$ ...

برحسب ژول (بر حسب انرژی جنبشی)

$eV_c = e(V_B - V_c) = 1\times 12$ ولت $= 12\,eV$ الکترون ولت

ج- اگر $l = 4mm$، چقدر زمان طول می‌کشد تا الکترون به قطب دیگر برسد؟

$l = 4\times10^{-3}\,m$ ، $E = \frac{12}{4\times10^{-3}} = 3\times10^{3}\ N/C$

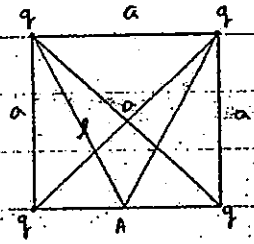
$eE = F_e = m_e a \rightarrow 1.6\times10^{-19}\times 3\times10^{3} = 9.1\times10^{-31}\, a \rightarrow a = \dots\ m/s^2$

$l = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow 4\times10^{-3} = \frac{1}{2}\times(\dots)\, t^2 \rightarrow t = \dots\ (s)$

د- خیر، زیرا به l ربطی ندارد و تغییری در جواب آن حاصل نخواهد شد.

@jozve_iut

مسأله ۶ فصل ۲۶:

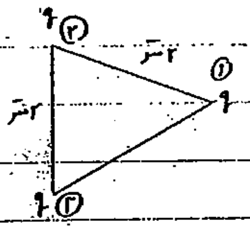


$V_o = 4\times \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (a\sqrt{2})}$

$V_o = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{q}{\pi\epsilon_0 a}$ ، $V_A = 2\times \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (\frac{a}{2})} + 2\times \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (\frac{\sqrt{5}a}{2})} = (1 + \frac{1}{\sqrt{5}}) \frac{q}{\pi\epsilon_0 a}$

$V_A > V_o$ با توجه به اینکه $1 + \frac{1}{\sqrt{5}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$

مسأله ۸ فصل ۲۶:



$q = 2\times10^{-6}\,C$

ابتدا هر سه که در بی‌نهایت هستند $V_1 = 0$ ، وقتی q از بی‌نهایت به ① می‌آید: $U_1 = qV_1$

$U_1 = 0$

الان پتانسیل ② برابر است با: $V_2 = \frac{2\times10^{-6}}{4\pi\epsilon_0\times 2}$ ، وقتی که q به ② می‌آید مقدار: $U_2 = qV_2 = (2\times10^{-6}) \frac{2\times10^{-6}}{4\pi\epsilon_0\times 2}$

و الان پتانسیل ③ برابر است با: $V_3 = \frac{2q}{8\pi\epsilon_0}$

و لذا برای آوردن q از بی‌نهایت به ③ هم مقدار: $U_3 = qV_3 = \frac{2q^2}{8\pi\epsilon_0} = \frac{2}{2}\times 9\times10^{9}\times (2\times10^{-6})^2\, V_3$

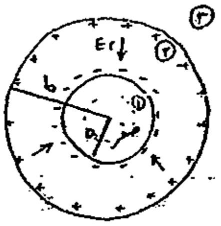
$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\times 1} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0\times 2}$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

ارزی پتانسیل : $U = \sum_{i=1}^{3} U_i = \dots + \dots + \dots$ (ج)

مسأله ۱۲ فصل ۲۲ :

داریم :



$q_1 = -80 \times 10^{-6} C \ , \quad a = 2.3 \ m$

$q_2 = +40 \times 10^{-6} C \ , \quad b = 2.5 \ m$

چون بر روی کره سطح گوسی $r<a$ هم مرکز با کره ۱ بار داخل صفر است

قانون گوس : $E_1 = 0$

و چون بار درون کره گوسی $a<r<b$ (هم مرکز با کره های ۱) برابر q_1 است :

قانون گوس : $E_r = \dfrac{80 \times 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

جهت $\vec{E_r}$ به سمت مرکز است و چون بار درون کره گوسی $r>b$ برابر $(-80+40) \times 10^{-6} C = -40 \times 10^{-6} C$ است

$\vec{E_r}$ هم به سمت مرکز است.

قانون گوس ، $E_r = \dfrac{40 \times 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ، $r>b$

چون درون کره رسانا است چون درون کره رسانا است

$V_1 = V_{r<a} = \left(\dfrac{-80 \times 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0 a}\right) + \left(\dfrac{40 \times 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0 b}\right)$

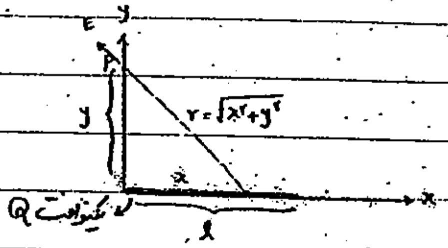
$V_2 = V_{a<r<b} = \left(\dfrac{-80 \times 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0 r}\right) + \left(\dfrac{40 \times 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0 b}\right)$

$V_3 = V_{r>b} = \left(\dfrac{-80 \times 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0 r}\right) + \left(\dfrac{40 \times 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0 r}\right)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} \times \frac{(x+\sqrt{x^2+y^2})}{(x+\sqrt{x^2+y^2})} = \int \frac{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} dx = \int \frac{\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{x+\sqrt{x^2+y^2}} dx = \int \frac{df}{f} = \ln f$$

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_a^b$$

مسأله ۱۵ فصل ۲۷ :



$\lambda = \dfrac{Q}{l}$ بار واحد طول

dx بار روی طول کوچک : $dq = \lambda \, dx = \dfrac{Q}{l} dx$

پتانسیل حاصل از dq در نقطه P : $dV = \dfrac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 l} \times \dfrac{dq}{\sqrt{x^2+y^2}}$

کل پتانسیل حاصل از Q در P : $V = \displaystyle\int_{x=0}^{x=l} dV = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 l} \int_0^l \dfrac{dq}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow V = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 l}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_0^l\right]$

$\rightarrow V_P = V(y) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 l}\left[\ln\left(l+\sqrt{l^2+y^2}\right) - \ln(y)\right]$

(y>0) برای

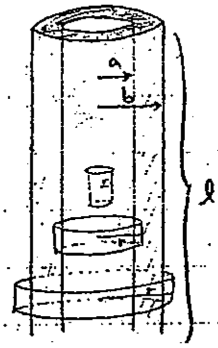
@jozve_iut

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \ell}\frac{d}{dy}\left(\ln\left(\ell+\sqrt{\ell^2+y^2}\right)-\ln y\right) \rightarrow E_y = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \ell}\left[\frac{0+\frac{y}{\sqrt{\ell^2+y^2}}}{\ell+\sqrt{\ell^2+y^2}}-y\right]$$

اما بدیهی است $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ غلط می‌باشد. چون باید E_x را با بردن فضل میدان پیدا نمود.

• سوال ۱۶ فصل ۲۲ •



$r<a$ برای $\rightarrow \rho = 0$

$a<r<b$ برای $\rightarrow \rho = \frac{k}{r}$

$r>b$ برای $\rightarrow \rho = 0$

} چگالی حجمی

۱- برای $r<a$ با انتخاب سطح گوسی استوانه‌ای شکل هم محور با استوانه‌های اصلی:

$$\epsilon_0 \oint \vec{E_1} \cdot \vec{ds} = 0$$

$E_1 = 0 \xrightarrow{\text{پس}}$ چون $2\pi r \ell \epsilon_0 \neq 0$ و $\epsilon_0 E_1 \times 2\pi r \ell = 0$: نتیجه می‌شود)

۲- برای $a<r<b$ هم سطح گوسی استوانه‌ای هم محور با استوانه اصلی می‌گیریم:

$$\oint \epsilon_0 \vec{E_2} \cdot \vec{ds} = q_{a-r} = \int_a^r \rho \, dv \longrightarrow \epsilon_0 \times E_2 \times 2\pi r \ell = \int_a^r \frac{k}{r} \times 2\pi r \ell \, dr = 2\pi \ell k \int_a^r dr = 2\pi \ell k (r-a)$$

$$\longrightarrow E_2 = \frac{k(r-a)}{\epsilon_0 r}$$

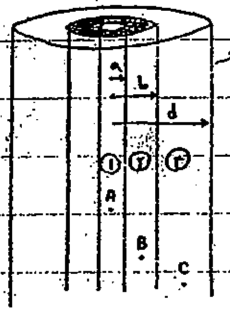
۳- در برای $r>b$ مانند دو مورد قبلی:

$$\epsilon_0 \oint \vec{E_3} \cdot \vec{ds} = 0 + \int_a^b \frac{k}{r} \times 2\pi r \ell \, dr + 0 \rightarrow \epsilon_0 E_3 \times 2\pi r \ell = 2\pi \ell k (b-a)$$

$$\rightarrow E_3 = \frac{k(b-a)}{\epsilon_0 r}$$

* برای فواصل d از محور بطوری که ما d باشد، پتانسیل را صفر در نظر می‌گیریم

فرض $V_d = 0$: پتانسیل نقاط روی سطح جانبی استوانه با شعاع d.



① $V_A - V_0 = \int_{r_1}^a \vec{E_1} \cdot \vec{dr} + \int_a^b \vec{E_2} \cdot \vec{dr} + \int_b^d \vec{E_3} \cdot \vec{dr} \rightarrow V_1 = 0 + \int_a^b \frac{k}{\epsilon_0}\left(1-\frac{a}{r}\right) dr +$

$\int_b^d \frac{k(b-a)}{\epsilon_0 r} dr + 0 \rightarrow V_{r<a} = \frac{k}{\epsilon_0}(b-a) - \frac{ka}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{k(b-a)}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{d}{b}\right) = cte$

در هر ناحیه‌ای که $\vec{E} = 0$ باشد، پتانسیل ثابت خواهد بود.

② $V_B - V_0 = \int_r^b \vec{E_2} \cdot \vec{dr} + \int_b^d \vec{E_3} \cdot \vec{dr} = \int_r^b \frac{k}{\epsilon_0}\left(1-\frac{a}{r}\right) dr + \int_b^d \frac{k(b-a)}{\epsilon_0 r} dr$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$= \frac{k}{\varepsilon_0}(b-r) - \frac{ka}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{r}\right) + \frac{k(b-a)}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d}{b}\right) = V_{0<r<b} \overset{\text{تعریف ۲}}{=} V(r)$$

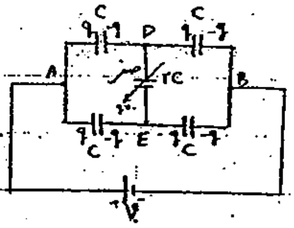
نه هرجا که $E \neq 0$ باشد، لزوماً هم پتانسیل نخواهد بود.

③ $V_c = V_3 = \int \vec{E}_3 \cdot \vec{dr} = \int_r^d \frac{k(b-a)}{\varepsilon_0 r} = \frac{k(b-a)}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d}{r}\right) > 0$

چون رابطه برای نقاط $r>d$ جواب را صحیح می‌دهد.

اما $\ln\left(\frac{d}{r}\right)$ برای $r>d$ منفی خواهد بود.

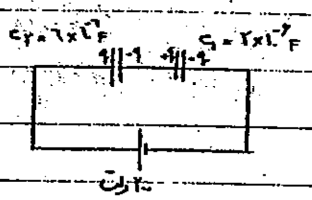
مسأله‌ی ۵ فصل ۲۷.



ساده →

$U_{\text{معادل}} = \sum U_i$ ترکیب $\to \frac{1}{2}\frac{(2q)^2}{C'} = 4 \times \frac{q^2}{2C} + 0 \to \frac{2}{C'} = \frac{1}{C} \to C' = 2C$

مسأله‌ی ۱۰ فصل ۲۷.



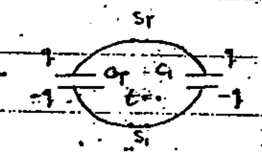
(الف) $\to \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_1} = 200$ یا $V_2 + V_1 = 200$

چون $C_2 = 3C_1$ پس:

یا $V_2 + 3V_2 = 200 \to V_2 = 50\,v$, $V_1 = 150\,v$

$\frac{q}{C_1} = 150 \to q = 150 \times 2 \times 10^{-6} = 3\times10^{-4}\,C$ یا $300\,\mu C$

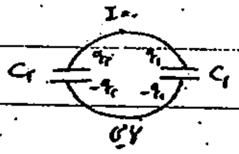
(ب) چون $C_1 \neq C_2$ است در مدار فوق جریان برقرار شده و وقتی که $I=0$ می‌شود:



$I = 0 \to V_1' = V_2' \to \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} \to q_2 = 3q_1$

و با توجه به پیوستگی بار داریم: $q_1 + q_2 = 2q$

$\to q_1 + 3q_1 = 2q \to q_1 = \frac{1}{2}q$ و $q_2 = \frac{3}{2}q$

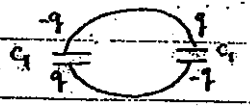


در $t=0$ داریم:

$U_0 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{3C_1} = \frac{4}{2}\frac{q^2}{3C_1}$

$U_{\text{نهایی}} = \frac{1}{2}\frac{(\frac{q}{2})^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{(\frac{3q}{2})^2}{3C_1} < U_{\text{اولیه}}$

چون مقداری از انرژی به حرارت تبدیل شده و مقداری هم صرف گرم شدن سیم‌ها در مدار شده است.

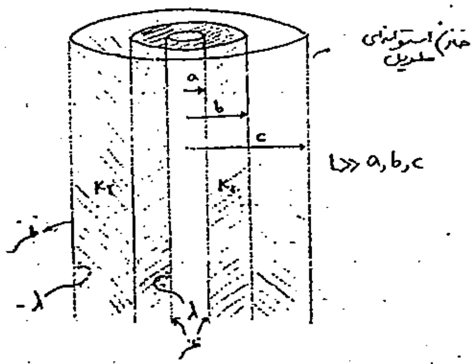


(ج) بدیهی است $-q$ و $+q$ ها خنثی می‌شوند:

$q_1'' = q_2'' = 0$ ، $V_1'' = V_2'' = 0$

@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

مسأله ۲۳ فصل ۲۷



برای ناحیه k_1 داریم:

$\varepsilon_0 \oint k\vec{E}\cdot d\vec{s} = \lambda l \rightarrow \overset{\text{بالا}}{0} + \overset{\text{پایین}}{0} + \varepsilon_0 k_1 E_1 \times 2\pi r l = \lambda l$

$\rightarrow E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 k_1 r} \quad , \quad a<r<b$

و برای ناحیه k_2 هم $b<r<c$:

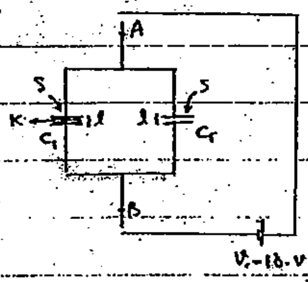
$\varepsilon_0 \oint k\vec{E}\cdot d\vec{s} = \lambda l \rightarrow \overset{\text{بالا}}{0} + \overset{\text{پایین}}{0} + \varepsilon_0 k_2 E_2 \times 2\pi r l = \lambda l$

$\rightarrow E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 k_2 r}$

$$C = \frac{q}{V_{a-c}} = \frac{q}{\int_a^b \vec{E_1}\cdot d\vec{r} + \int_b^c \vec{E_2}\cdot d\vec{r}} \rightarrow C = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 k_1}\int_a^b \frac{dr}{r} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 k_2}\int_b^c \frac{dr}{r}} = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 k_1}\ln(\frac{b}{a}) + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 k_2}\ln(\frac{c}{b})}$$

$$\Rightarrow C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\frac{1}{k_1}\ln(\frac{b}{a}) + \frac{1}{k_2}\ln(\frac{c}{b})}$$

مسأله ۲۴ فصل ۲۷



@jozve_iut

$C_1 = kC_2 = 10\times10^{-6}F \quad , \quad C_2 = 3\times10^{-6}F$

(الف) موازی‌اند: $V_1 = 150 = \frac{q_1}{C_1} \rightarrow q_1 = 150 C_1 = 150\times10\times10^{-6}$

$q_1 = 1500\times10^{-6}C$ یا $q_1 = 1500\mu C$

$V_2 = 150 = \frac{q_2}{C_2} \rightarrow q_2 = 150 C_2 = 150\times3\times10^{-6}$

$q_2 = 450\times10^{-6}C$ یا $q_2 = 450\mu C$

(ب) $U_{کل} = U_1 + U_2 = \frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{q_2^2}{C_2} = \frac{1}{2\times10\times10^{-6}}(1500\times10^{-6})^2 + \frac{1}{2\times3\times10^{-6}}(450\times10^{-6})^2 = \dots$ ژول

(ج) در حالی که ابتدا باتری قطع شده است، باتی (عایق) را از خازن سمت چپ خارج می‌کنیم. بعلاوه باید کار مثبت انجام دهیم تا عایق خارج شود
(یعنی انرژی خازن زیاد می‌شود) و در تعادل جریان به صفر رسید.

پایستگی بار: $2q = q_1 + q_2 = (450 + 1500)\times10^{-6}C$

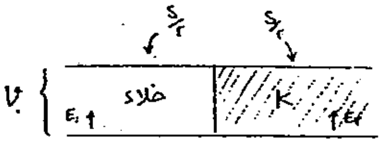
$q = \frac{450+1500}{2}\times10^{-6}C$

$U_{کل}' = \frac{1}{2}\times\frac{(\dots)^2}{3\times10^{-6}}\times 2$ ژول → بیشتر از کل قبلی است.

(د) $V_1 = V_2 = \frac{q}{3\times10^{-6}} = \dots$ ولت

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

مسأله‌ی ۳۲ فصل ۲۷.



$E_1 l = V_0 = E_2 l$

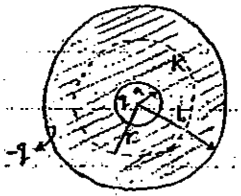
$E_1 = E_2 = \frac{V_0}{l}$

$u_{E_1} = \frac{1}{2}\epsilon_0 (\frac{V_0}{l})^2$, $u_{E_2} = \frac{1}{2}K\epsilon_0 (\frac{V_0}{l})^2$

$U_1 = u_{E_1} \times \frac{S}{2} \times l = \frac{1}{4}\epsilon_0 \frac{V_0^2}{l^2} \times Sl$, $U_2 = u_{E_2} \times \frac{S}{2} \times l = \frac{1}{4}K\epsilon_0 \frac{V_0^2}{l^2} \times Sl$

$\frac{U_2}{U_{کل}} = \frac{U_2}{U_1+U_2} = \frac{K}{1+K}$, $\frac{U_1}{U_{کل}} = \frac{U_1}{U_1+U_2} = \frac{1}{1+K}$

مسأله‌ی ۴۴ فصل ۲۷.



K را طوری پیدا کنید که $U_{a \to r_0} = U_{r_0 \to b}$

$$\int_a^{r_0} u_E 4\pi r^2 dr = \int_{r_0}^{b} u_E 4\pi r^2 dr$$

داریم: قانون گوس: $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 K r^2}$

بنابراین: $\int_a^{r_0} \frac{1}{2}K\epsilon_0 (\frac{q}{4\pi\epsilon_0 K r^2})^2 \times 4\pi r^2 dr = \int_{r_0}^{b} \frac{1}{2}K\epsilon_0 (\frac{q}{4\pi\epsilon_0 K r^2}) \times 4\pi r^2 dr \to \int_a^{r_0} \frac{dr}{r^2} = \int_{r_0}^{b} \frac{dr}{r^2}$

$\to (\frac{1}{a} - \frac{1}{r_0}) = (\frac{1}{r_0} - \frac{1}{b}) \to \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r_0}$

@jozve_iut

$\to r_0 = \frac{2ab}{a+b}$

جریان الکتریکی:

اگر در dt ثانیه مقدار dq بار الکتریکی از مقطع یک سیم عبور کند جریان الکتریکی عبوری از سیم از رابطه‌ی $I = \frac{dq}{dt}$ بدست می‌آید.

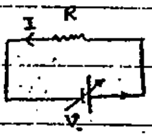
برعکس: اگر مثلاً $I = I_0 \sin\frac{2\pi}{T}t$ باشد:

بار عبوری از سیم در $\frac{T}{2}$ ثانیه: $q = \int_0^{T/2} I dt \to q = I_0 \int_0^{T/2} (\sin\frac{2\pi}{T}t) dt =$

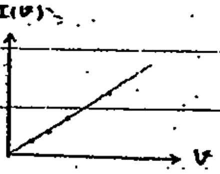
$\times I_0 \times \frac{T}{2\pi} \cos\frac{2\pi}{T}\Big|_0^{T/2} \to q = \frac{I_0 T}{2\pi}(\cos 0 - \cos\pi) \to q_{T/2} = \frac{I_0 T}{\pi}$

درست: $I_0 (-\frac{T}{2\pi})(\cos\frac{2\pi}{T}t)\Big|_0^{T/2} = I_0(-\frac{T}{2\pi})(-1-1) = \frac{T}{\pi}I_0$

ارتباط بین جریان و مقاومت (قانون اهم)



$V_R = V_0$



زاویه‌ی خط نمودار به جنس مقاومت الکتریکی بستگی دارد.

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

@jove_iut

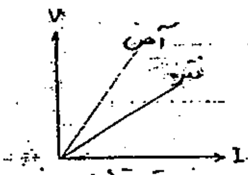
www.jozve-iut.ir

« مباحث پایان ترم »

مقاومت ویژه ρ	رسانایی ویژه $\sigma = \frac{1}{\rho}$	
$1{,}62 \times 10^{-8}\ \Omega m$	$\frac{1}{1{,}62} \times 10^{8}\ (\Omega m)^{-1}$	نقره
$2{,}75 \times 10^{-8}\ \Omega m$	$\frac{1}{2{,}75} \times 10^{8}\ (\Omega m)^{-1}$	آلومینیوم
$9{,}68 \times 10^{-8}\ \Omega m$	$\frac{1}{9{,}68} \times 10^{8}\ (\Omega m)^{-1}$	آهن
⋮	⋮	

نکته: در نمودار $I-V$ (I برحسب V) ضریب زاویه‌ی نقره نسبت به بقیه بیشتر و برای آهن کم‌تر است.

اگر S رسانایی یک سیم باشد: $I = S V$ (ضریب زاویه) $S_{آهن} < S_{نقره}$

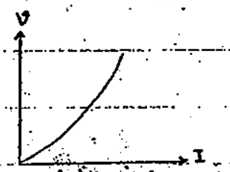


برای مقاومت‌های اهمی خطی

چون مقاومت را برحسب R نشان می‌دهیم: $S = \frac{1}{R}$ ، بنابراین:

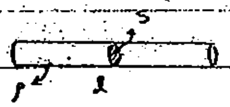
$$I = \frac{1}{R} V \rightarrow V = IR$$

به رابطه‌ی $V = RI$ ، قانون اهم گفته می‌شود.



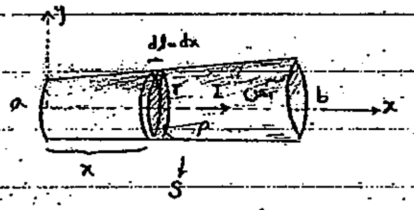
برای نیمه‌رساناها

برای مقطع ثابت مثلاً استوانه‌ی توپر: $R = \rho \frac{l}{S}$



اما اگر S ثابت نباشد: $dR = \rho \frac{dl}{S}$

که جریان الکتریکی باید در راستای dl یا عمود بر سطح ds باشد.



$b > a$

$dR = \rho \frac{dl}{\pi r^2}$ مقاومت طول dx که در راستای جریان I است.

$$\rightarrow R = \int_{x=0}^{x=l} dR = \frac{\rho}{\pi} \int_{r=a}^{r=b} \frac{dx}{r^2}$$

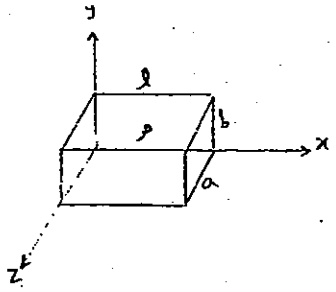
$$\frac{dr}{dx} = \frac{b-a}{l}$$

$$\rightarrow R = \frac{\rho}{\pi} \times \frac{l}{b-a} \int_a^b \frac{dr}{r^2} \rightarrow R = \frac{\rho l}{\pi (b-a)} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \Rightarrow R = \rho \frac{l}{\pi a b}$$

مقاومت در جهت عبور جریان در امتداد طول مخروط ناقص

در حالت خاص: $b = a$ ؛ $R = \rho \frac{l}{\pi a^2} \leftarrow$ استوانه

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان



برای جریان در امتداد x ها : $R_x = \rho \frac{l}{ab}$

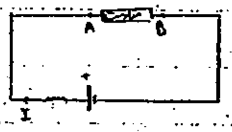
برای جریان در امتداد y ها : $R_y = \rho \frac{b}{al}$

برای جریان در امتداد z ها : $R_z = \rho \frac{a}{bl}$

توان یک مقاومت : مقدار انرژی که در واحد زمان در مقاومت به صورت گرما ظاهر می‌شود و آن را گرم می‌کند.

$p = \frac{dE}{dt}$ (p ← توان ، dE ← انرژی)

$V_A > V_B$



وقتی بار جزئی مثبت dq در A باشد، انرژی الکتریکی $V_A dq$ را دارد و وقتی به B می‌رسد انرژی آن $V_B dq$ شده است. چون $V_B < V_A$ پس انرژی الکتریکی آن کاهش پیدا کرده است.

$dU =$ ثانویه − اولیه $= V_B dq - V_A dq$

انرژی الکتریکی کاهش یافت و در عوض انرژی گرمایی به مقدار $dE = |dU| = (V_A - V_B) dq$ افزایش می‌یابد.

← $V_R = V_A - V_B$ ؛ ولتاژ دو سر مقاومت به صورت مثبت

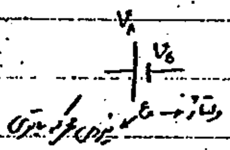
$dE = V_R dq$

چون $P_R = \frac{dE}{dt}$: توان گرمایی مقاومت

$P_R = V_R \frac{dq}{dt} \to P_R = V_R I$ (1)

چون $V_R = RI$ ؛ $P_R = RI^2$ (2) ، $P_R = \frac{V_R^2}{R}$ (3)

← توان کلی یک باتری را هم اگر به شیوه اثبات فوق عمل کنیم به رابطه زیر می‌رسیم :



برای وقتی که باتری انرژی دهنده است. $P_\varepsilon = \varepsilon I$

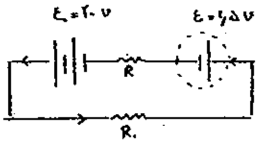
اگر مقاومت درون باتری را با r نشان دهیم، در حین به مقدار $P_r = rI^2$ انرژی در داخل آن به گرما تبدیل می‌شود.

توان خروجی باتری : $P_{خروجی} = \varepsilon I - rI^2$

مدارهای الکتریکی : اگر باتری در یک مدار به صورت ضد محرکه قرار داشته باشد (یعنی در حال شارژ شدن است)

@jozve_iut

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut



برای باتری در حال شارژ شدن می‌نویسیم:

$$P = \mathcal{E}I + rI^2$$

، برای خازن چون: $u = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ (انرژی خازن)

$$\text{توان خازن}: \quad P_C = \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) \rightarrow 2q \times \frac{1}{2C}\frac{dq}{dt} = P_C = \frac{q}{C}\frac{dq}{dt}$$

توان خازن (مقدار انرژی که در یک ثانیه به خازن در حال شارژ اضافه می‌شود): $P_C = V_C I$

در یکی از فصل‌های میدان مغناطیسی خواهیم دید که انرژی سیملوله (القاگر) با ضریب خودالقایی L که از آن جریان I می‌گذرد برابر است با: $u_L = \frac{1}{2}LI^2$

$$\text{توان القاگر}: \quad P_L = \frac{du_L}{dt} = \frac{1}{2}L\frac{d}{dt}(I^2) = \frac{1}{2}L \times 2I\frac{dI}{dt} \rightarrow P_L = \left(L\frac{dI}{dt}\right)I$$

بعداً خواهیم دید: $L\frac{dI}{dt} = V_L$ پس: $P_L = V_L I$

@jozve_iut

دو قانون مهم مربوط به مدارها که به صورت زیر می‌باشند:

۱- قانون شدت جریان‌ها: در هر گره (نقطه‌ای که چند سیم به یکدیگر وصل شده‌اند) جمع جریان‌های خروجی با جمع جریان‌های ورودی برابرند.

$$\sum_{i=1}^{4} I'_i = \sum_{j=1}^{3} I_j \quad : \text{(برای گره A)}$$

تقاطع A یک تقاطع معمولی است، مثل صفحات خازن نیست. ← اصل پایستگی بار الکتریکی

قانون شدت جریان‌ها معادل با اصل پایستگی بار الکتریکی است. یعنی اگر در dt ثانیه از سیم ۱ مقدار $I_1 dt$ از تقاطع A خارج شده باشد و به همین منوال $I_2 dt$ و $I_3 dt$ و اگر در dt ثانیه از سیم ۱' مقدار $I'_1 dt$ بار به تقاطع A وارد شده باشد و به همین صورت $I'_2 dt$ ، $I'_3 dt$ ، $I'_4 dt$ ؛ لذا طبق اصل پایستگی بار می‌بایست:

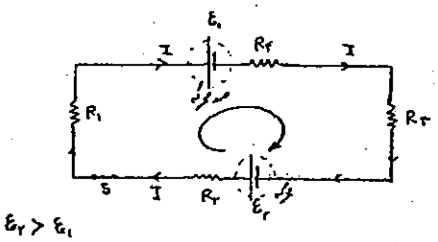
$$I_1 dt + I_2 dt + I_3 dt = I'_1 dt + I'_2 dt + I'_3 dt + I'_4 dt \qquad \sum_i I'_i = \sum_j I_j$$

۲- قانون دوم (کیرشهف): در هر حلقه‌ی بسته از هر مدار بسته جمع ولتاژها برابر صفر است.

اصل پایستگی انرژی $\equiv$ $\sum V_i = 0$: جمع جبری پتانسیل‌ها در هر حلقه‌ی بسته

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

مدار تک حلقه‌ای :



در مدار تک حلقه‌ای داریم باید : $\sum_{i=1}^{6} V_i = 0$

(رابطه پتانسیل در حلقه‌ی بسته بدست می‌آید)

$\varepsilon_2 - IR_2 - IR_1 - \varepsilon_1 - IR_4 - IR_3 = 0$

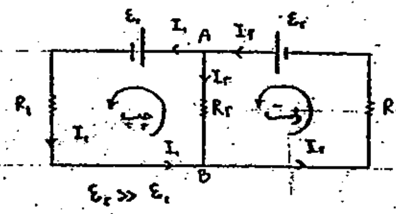
طبق اصل پایستگی انرژی باید جمع توان‌های تولیدی = جمع توان‌های مصرفی برابر باشد.

$P_{\varepsilon_2} = P_{\varepsilon_1} + P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{R_4}$

$\varepsilon_2 I = \varepsilon_1 I + R_1 I^2 + R_2 I^2 + R_3 I^2 + R_4 I^2 \rightarrow \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + R_1 I + R_2 I + R_3 I + R_4 I$

$\rightarrow \varepsilon_2 - \varepsilon_1 - IR_1 - IR_2 - IR_3 - IR_4 = 0$

مدارهای دو حلقه‌ای :



از گره A و B داریم : $I_2 = I_1 + I_3$ (c)

در حلقه‌ی چپ داریم :

$-\varepsilon_1 - IR_1 + IR_3 = 0$ (a)

در حلقه‌ی راست داریم :

$-I_2R_2 - I_3R_3 + \varepsilon_2 = 0$ (b)

آیا طبق اصل پایستگی انرژی باید برای کل مدار نوشت :

$\sum P_{i_{\text{تولیدی}}} = \sum P_{j_{\text{مصرفی}}}$

$\rightarrow P_{\varepsilon_2} = P_{\varepsilon_1} + P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} \rightarrow \varepsilon_2 I_2 = \varepsilon_1 I_1 + R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2$ ، $I_3 = (I_2 - I_1)$

$\varepsilon_2 I_2 = \varepsilon_1 I_1 + R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_2^2 + R_3 I_1^2 - 2R_3 I_1 I_2$ (*)

طرفین رابطه‌ی a را در I_1 و طرفین رابطه‌ی b را در I_2 ضرب می‌کنیم

a : $-\varepsilon_1 I_1 - I_1^2 R_1 + R_3(I_2 - I_1) I_1 = 0$

b : $-R_3(I_2 - I_1) I_2 - I_2^2 R_2 + \varepsilon_2 I_2 = 0$

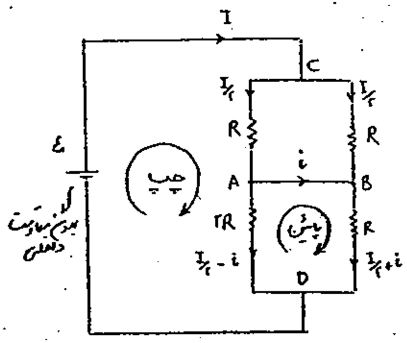
جمع می‌کنیم $\rightarrow$ رابطه‌ی (*) نتیجه خواهد شد.

در یک مدار N حلقه‌ای (N مدار و حلقه‌ی مستقل) N رابطه‌ی پتانسیل که مستقل‌اند و یک رابطه‌ی پایستگی انرژی در کل مدار معادل است :

@jozve_iut

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

مثال ۱) اگر سیم بین A و B بدون مقاومت است. جهت و مقدار i بین A و B را مشخص کنید؟



$V_{AB} = R_{AB}\, i \rightarrow V_{AB} = 0$

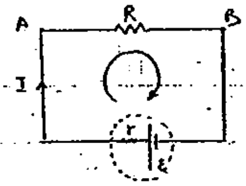
در حلقه‌ی دوم (پایین): $-(\frac{I}{2}-i)\times 2R + (\frac{I}{2}+i)R = 0$

$-IR + 2Ri + \frac{I}{2}R + Ri = 0 \rightarrow 3Ri = \frac{I}{2}R \rightarrow I = 6i$

در حلقه‌ی اول (چپ): $+\varepsilon - R\frac{I}{2} - 2R(\frac{I}{2}-i) = 0 \rightarrow \varepsilon = R(\frac{3I}{2} - i)$

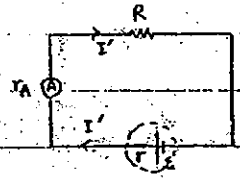
$\rightarrow \varepsilon = R(\frac{3}{2}(6i) - i) = 8iR \rightarrow i = \frac{\varepsilon}{8R}$

آمپرمتر:



$\varepsilon - rI - RI = 0 \rightarrow I = \frac{\varepsilon}{r+R}$

در آزمایشگاه برای اندازه‌گیری I از آمپرمتر استفاده می‌کنیم:

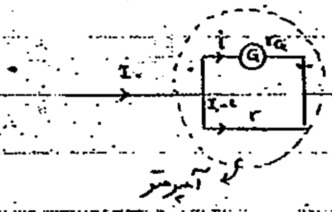


$\varepsilon - rI' - r_A I' - RI' = 0 \rightarrow I' = \frac{\varepsilon}{r + r_A + R}$

$I' < I$

یعنی عملاً آمپرمتر مقدار کمتری از مقدار واقعی (I) را نشان می‌دهد. برای اینکه $|\Delta I| = I - I' \rightarrow 0$ میل کند لازم می‌شود $r_A \rightarrow 0$ میل کند، عملاً آمپرمترها مقاومت داخلی کمی دارند.

گالوانومتر:
وسیله‌ای است که جریان‌های بسیار کم را نشان می‌دهد (جریان‌های زیاد باعث سوختن گالوانومتر می‌شود)



مثلاً: $r_G = 20\,\Omega$, $r = 1\,\Omega$

V_{AB} (بالا) $= V_{AB}$ (پایین) $\rightarrow i r_G = (I_0 - i) r$

اگر $r_G \gg r$ باشد آنگاه $i \ll I_0$ خواهد بود و لذا گالوانومتر نمی‌سوزد.

r_A یعنی معادل موازی دو مقاومت r_G و r: $\frac{1}{r_A} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_G}$

در این صورت: $r_A < r$. پس اگر $r = 1\,\Omega$ باشد، r_A از یک اهم کمتر است

یعنی $|\Delta I|$ کم است.

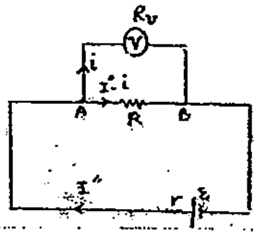
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

ولتمتر:

در مدار ساده‌ی اول (صفحه‌ی قبل) داریم:

$$V_{AB} = V_R = IR = \frac{\varepsilon}{R+r} R$$

تئوری: $V_R = \frac{\varepsilon R}{R+r} = V_{AB}$



اما عملاً ولتمتر را با R موازی می‌بندیم:

اگر R' معادل موازی R_V و R باشد، داریم: $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_V} + \frac{1}{R}$

$$\rightarrow R' = \frac{1}{\frac{1}{R_V} + \frac{1}{R}} \rightarrow I' = \frac{\varepsilon}{r+R'} = \frac{\varepsilon}{r + \frac{1}{\frac{1}{R_V}+\frac{1}{R}}}$$

$$V'_{AB} = I'R' = iR_V = (I'-i)R$$

$$\rightarrow V'_{AB} = I'R' = \frac{\varepsilon}{r+\frac{1}{\frac{1}{R_V}+\frac{1}{R}}} \times \frac{1}{\frac{1}{R_V}+\frac{1}{R}}$$

یعنی ولتمتر این مقدار ($V'_{AB} = \dots$) را به جای $V_{AB} = \frac{\varepsilon R}{R+r}$ نشان می‌دهد.

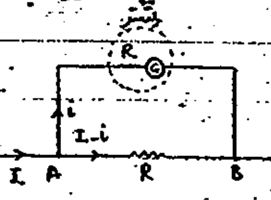
برای اینکه $|\Delta V_{AB}| \to 0$ میل کند ($V'_{AB} \to V_{AB}$) لازم می‌شود $R_V \to \infty$ میل کند.

@jozve_iut

پس: $\lim\limits_{R_V \to \infty} V'_{AB} = \frac{\varepsilon}{r+\frac{1}{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{R}}} \times \frac{1}{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{R}} = \dots = \frac{\varepsilon R}{R+r} = V_{AB}$

پس برای اینکه ولتمترها خطای کمی داشته باشند باید مقاومت داخلی آن‌ها زیاد باشد.

و چون با سری (متوالی) کردن یک مقاومت بزرگ با گالوانومتر، ولتمتر می‌سازیم، پس مقاومت ولتمترها زیاد است.



$R_V = R + r_G \qquad R \gg r_G$

چون $R_V \gg R$ باعث می‌شود i کم باشد و گالوانومتر نسوزد.

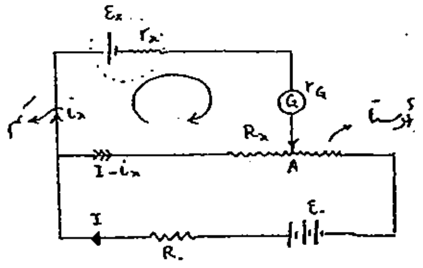
مقاومت داخلی همه‌ی ولتمترها زیاد است.

پتانسیومتر (یک مدار است) ← برای تعیین پتانسیل یک باتری

برای بدست آوردن نیروی محرکه‌ی مجهول (ε_x)

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

در حلقه‌ی بالایی:



$$-\mathcal{E}_x - r_x i_x - r_G i_x + R_x (I - i_x) = 0$$

$$i_x = \frac{R_x I - \mathcal{E}_x}{R_x + r_G + r_x}$$

وقتی با تغییر دادن R_x گالوانومتر دقیقاً روی صفر تنظیم شد: $i_x = 0$

$$\rightarrow R_x I - \mathcal{E}_x = 0 \rightarrow \mathcal{E}_x = R_x I$$

آمپرمتری که I را دقیق معلوم کند نداریم.

اکنون آزمایش را با $\mathcal{E}_s$ دقیقاً معلوم تکرار می‌کنیم. لازم می‌شود مجدداً قسمتی از مقاومت رئوستا که در شاخه‌ی بالا شرکت دارد تغییر دهیم تا دقیقاً $i_s = 0$ صفر شود (این مقاومت را R_s فرض می‌کنیم).

در این صورت رابطه‌ی $\mathcal{E}_s = R_s I'$ بدست می‌آید که I' جریان حلقه‌ی پایینی است.

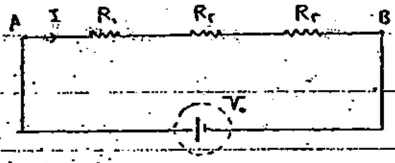
$$\frac{\mathcal{E}_x}{\mathcal{E}_s} = \frac{R_x I}{R_s I'}$$

اما $\frac{I'}{I} = 1$ زیرا با توجه به $i_x = i_s = 0$: $I = I' = \frac{\mathcal{E}_0}{R_0 + R}$ (R: مقاومت کل رئوستا)

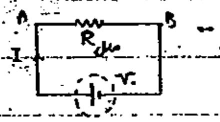
$$\rightarrow \mathcal{E}_x = \mathcal{E}_s \times \frac{R_x}{R_s}$$ (دقیق)

* ترکیب مقاومت:

۱- حالت سری:



معادل



به جای رابطه‌ی روبه‌رو از رابطه‌ی توان هم می‌شود استفاده کرد:

$$V_{AB\,معادل} = V_{AB\,ترکیب}$$

$$R_{معادل} I = R_1 I + R_2 I + R_3 I$$

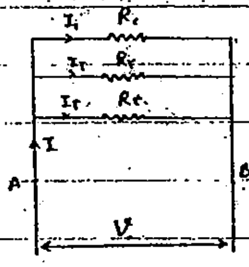
$$R_{معادل} = \sum_{i=1}^{3} R_i$$

پایستگی انرژی در ترکیب: $P_{معادل} = \sum_{i=1}^{N} P_{i\,ترکیب}$

که برای حالت سری داریم:

$$R_{معادل} I^2 = R_1 I^2 + R_2 I^2 + R_3 I^2 \longrightarrow R_{معادل} = \sum_{i=1}^{3} R_i \quad (سری)$$

۲- حالت موازی:



$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = \frac{V_0}{R_1} , \quad I_2 = \frac{V_0}{R_2} , \quad I_3 = \frac{V_0}{R_3}$$

قانون اهم: $I = \frac{V_0}{R_{معادل}} : \frac{V_0}{R_{معادل}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{V_0}{R_i} \Rightarrow \frac{1}{R_{معادل}} = \sum \frac{1}{R_i}$ (موازی)

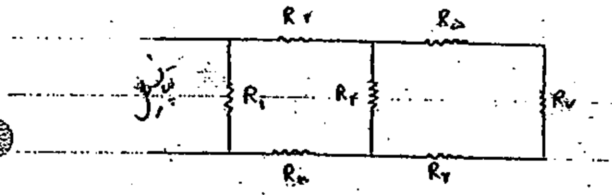
@jozve_iut
کانال مرجع جزولت دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

$P_R = RI^2 = V_R I = \frac{V_R^2}{R}$

چون باید در رابطه‌ی $P_{کل} = P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3}$ صدق کند:

$$\frac{V_0^2}{R} = \frac{V_0^2}{R_1} + \frac{V_0^2}{R_2} + \frac{V_0^2}{R_3} \longrightarrow \frac{1}{R_{کل}} = \sum \frac{1}{R_i} \quad (موازی)$$

۳- حالتی که هم از فرمول $R = \sum R_i$ و هم از فرمول $\frac{1}{R'} = \sum \frac{1}{R'_i}$ استفاده می‌شود:



R_5 و R_6 و R_7 سری‌اند:

$R'_1 = R_5 + R_6 + R_7$

اکنون R'_1 و R_4 موازی‌اند:

$$\frac{1}{R'_2} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R'_1}$$

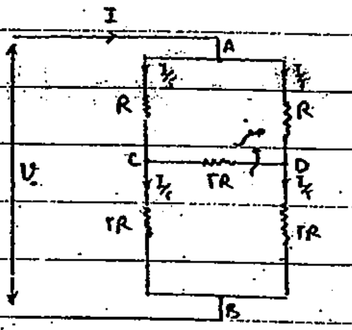
R'_2 و R_2 و R_3 سری‌اند:

$R'_3 = R_2 + R_3 + R'_2$

حال R'_3 و R_1 موازی‌اند:

$$\frac{1}{R_{کل}} = \frac{1}{R'_3} + \frac{1}{R_1} \longrightarrow R_{کل} \text{ بدست می‌آید}$$

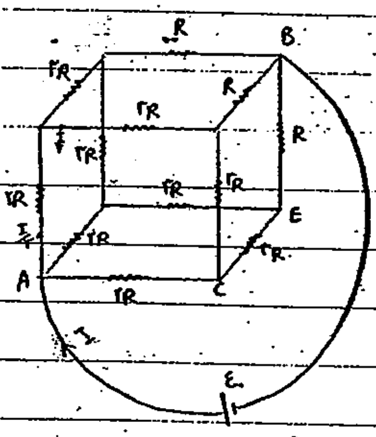
۴- برای ترکیب‌های متقارن



(الف) $R_{کل} I^2 = 2 \times R\left(\frac{I}{2}\right)^2 + 2 \times 2R \times \left(\frac{I}{2}\right)^2 + 3(صفر)^2$

$R_{کل} = \frac{3}{2}R$

چون C و D هم‌اندازه هم پتانسیل هستند پس از 3R جریان نمی‌گذرد.



(ب) وقتی A و B به دو سر باتری وصل باشد از هر مقاومت با مقدار R و 2R مقدار $\frac{I}{3}$ آمپر جریان می‌گذرد و از مقاومت‌های 3R هر کدام $\frac{I}{6}$ جریان می‌گذرد.

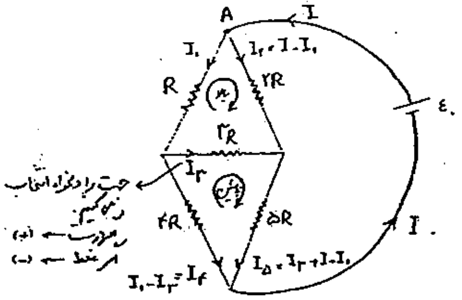
صدق شرط توان‌ها باید:

$$R_{کل} I^2 = 3 \times R\left(\frac{I}{3}\right)^2 + 3 \times 2R\left(\frac{I}{3}\right)^2 + 6 \times 3R\left(\frac{I}{6}\right)^2$$

$$R_{کل} = \left(3 \times \frac{1}{9} + 6 \times \frac{1}{9} + 18 \times \frac{1}{36}\right)R = \frac{3}{2}R$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

۵- حالت کلی :



در حلقه‌ی بالا داریم :

$$-2R\,(I-I_1) + 3R\,(I_2) + R\,(I_1) = 0$$

در حلقه‌ی پایین داریم :

$$-3R\,(I_2) - 5R\,(I_2+I-I_1) + 4R\,(I_1-I_2) = 0$$

با حل این دو معادله I_1 و I_2 برحسب I بدست می‌آیند.

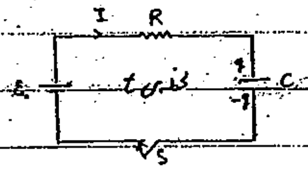
پس جریان هر پنج شاخه معلوم است (برحسب I). در رابطه‌ی :

$$R_{eq} I^2 = R I_1^2 + 2R I_2^2 + 3R I_3^2 + I_4^2\, 4R + 5R\, I_5^2 \ldots$$

$$\longrightarrow R_{eq} = \ldots R$$

* مدارهای R-C :

۱- شارژ یک خازن :



ابتدا خازن بدون بار است و در $t=0$ کلید S بسته می‌شود

$$q_{t=0} = 0$$

$$+\varepsilon_0 - RI - \frac{q}{C} = 0 \longrightarrow \varepsilon_0 = \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt}$$

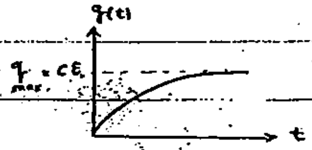
$$\longrightarrow -\frac{1}{C}dt = R\,\frac{-\frac{1}{C}dq}{\varepsilon_0 - \frac{q}{C}} \Rightarrow -\frac{1}{RC}\int_0^t dt = \int_0^q \frac{-\frac{1}{C}dq}{\varepsilon_0 - \frac{q}{C}}$$

$$\Rightarrow -\frac{t}{RC} = \ln\left(\varepsilon_0 - \frac{q}{C}\right)\Big|_0^q = -\ln(\varepsilon_0 - 0) + \ln\left(\varepsilon_0 - \frac{q}{C}\right) = \ln\left(\frac{\varepsilon_0 - \frac{q}{C}}{\varepsilon_0}\right)$$

اگر $x = \ln y$ باشد : $y = e^x$:

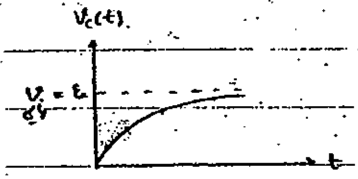
$$\frac{\varepsilon_0 - \frac{q}{C}}{\varepsilon_0} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\longrightarrow \varepsilon_0 - \frac{q}{C} = \varepsilon_0\, e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow \boxed{q = C\varepsilon_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$



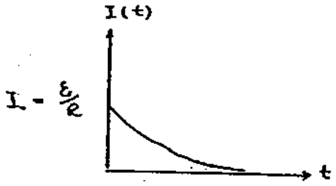
چون : $V_C = \frac{q}{C}$ پس :

$$V_C = \varepsilon_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$I = \frac{dq}{dt} = C\varepsilon \frac{d}{dt}(1-e^{-\frac{t}{RC}}) \rightarrow I = C\varepsilon(0-(-\frac{1}{RC})e^{-\frac{t}{RC}}) \rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$



انرژی خازن: $u(t) = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{C^2\varepsilon^2(1-e^{-\frac{t}{RC}})^2}{2C}$

$u_{max} = u_{نهایی} = \frac{1}{2}C\varepsilon^2$

زیرا $V_{max} = \varepsilon$

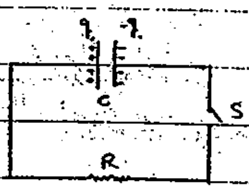
$P_R = RI^2 \rightarrow \frac{dQ}{dt} = RI^2$: Q برحسب ژول $\rightarrow dQ = RI^2 dt$

کل گرمای ایجاد شده در مقاومت در کل مدت شارژ خازن: $R \times \frac{\varepsilon^2}{R^2}\int_0^\infty (e^{-\frac{t}{RC}})^2 dt$

$$Q_{کل} = \frac{\varepsilon^2}{R}\times\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}}dt = \frac{\varepsilon^2}{R}\left(\frac{RC}{-2}\right)e^{-\frac{2t}{RC}}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{2}C\varepsilon^2(e^{-\infty}-e^{0})$$

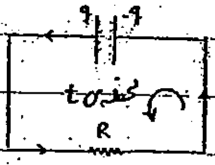
$\Rightarrow Q_{کل} = \frac{1}{2}C\varepsilon^2 = u$ نهایی خازن (برحسب ژول)

۲- دشارژ خازن (تخلیه‌ی بار خازن):



در لحظه‌ی t=0 کلید وصل می‌شود: $(q_{t=0} = q_0)$

$q_t < q_0$



رابطه‌ی پایستگی انرژی: $P_{باتری} = P_R + P_C$

$0 = RI^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) = RI^2 + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt}$

$\frac{dq}{dt}$ زیرا بار کاهش می‌یابد داریم: $\frac{dq}{dt} = I < 0$ پس:

$0 = RI^2 + \frac{q}{C}I \qquad 0 = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$

در حلقه‌ی فوق اگر بنویسیم:

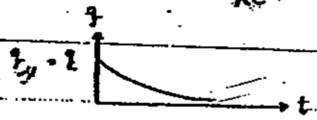
$\frac{q}{C} - RI = 0$ نادرست است. به طور صحیح داریم:

$\frac{q}{C} - R|I| = 0$

چون I منفی است: $\frac{q}{C} + RI = 0$

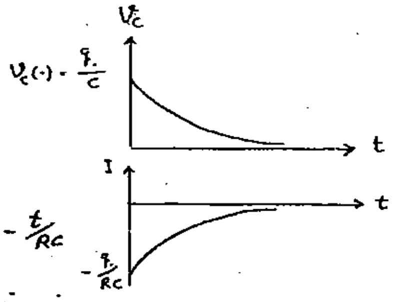
$$R\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{C} \rightarrow \int_{q_0}^{q}\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \rightarrow \ln q - \ln q_0 = -\frac{t}{RC} \rightarrow \ln\frac{q}{q_0} = -\frac{t}{RC}$$

$$\rightarrow \frac{q}{q_0} = e^{-\frac{t}{RC}} \therefore q_{(t)} = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$



@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$V_C = \frac{q}{C} \rightarrow V_C = \frac{q_0}{C} e^{-\frac{t}{RC}}$$



$$I = \frac{dq}{dt} = q_0 \frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{t}{RC}}\right) = q_0\left(-\frac{1}{RC}\right) e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$I = -\frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} < 0$$ یعنی در خلاف جهت شارژ تخلیه می‌شود.

در مدت زمانی که خازن تخلیه شده است (تخلیه‌ی کامل) در مقاومت چقدر گرما ایجاد شده است؟

← انرژی اولیه‌ی خازن $\frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}$ بوده که به صفر رسیده است و طبق اصل پایستگی انرژی باید $Q_R = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}$ باشد و با محاسبه‌ی مستقیم:

$$P_R = \frac{dQ_R}{dt} = RI^2 = R\left(\frac{q_0^2}{R^2C^2}\right) e^{-\frac{2t}{RC}} \rightarrow Q_R = \int_{t=0}^{\infty} dQ_R = \frac{q_0^2}{RC^2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} dt$$

$$= \frac{q_0^2}{RC^2} \times \left(-\frac{RC}{2}\right) e^{-\frac{2t}{RC}}\Big|_0^{\infty} = -\frac{q_0^2}{2C}\left(e^{-\infty} - e^{0}\right) \Rightarrow Q_R = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}$$

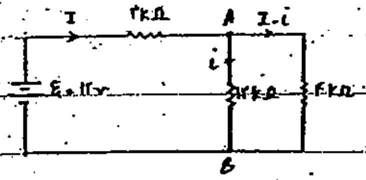
ثابت زمانی در مدار شارژ و دشارژ:

مدت زمانی که طول می‌کشد تا شدت جریان از I_0 به $\frac{I_0}{e}$ برسد را (در مدار شارژ و دشارژ) ثابت زمانی می‌گوییم.

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{و} \quad \text{ثابت زمانی} = \tau \Rightarrow \frac{I_0}{e} = I_0 e^{-\frac{\tau}{RC}} \rightarrow \tau = RC$$

مثلاً اگر $R = 100\,\Omega$ و $C = 2\,\mu F$ داریم: $\tau = 100 \times 2\times10^{-6} = 2\times10^{-4}$ sec

مسئله ۱۵ فصل ۲۹)



اگر R' معادل 4kΩ و 12kΩ باشد: $R' = 3k\Omega$

$$I = \frac{12}{6000} = 2\,mA \quad *$$

$$V_{AB} = 12000\, i = 4000\,(I - i) \xrightarrow{*} i = 0.5\,mA$$

$$I - i = 1.5\,mA$$

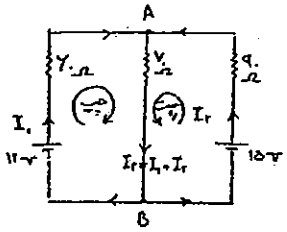
توان خروجی باتری: $P_E = EI = 12 \times 2 \times 10^{-3} = 24\times10^{-3}$ W

جمع توان‌های مصرفی: $\sum_1^3 R_i I_i^2 = 3000(2\times10^{-3})^2 + 12000(\frac{1}{2}\times10^{-3})^2 + 4000(\frac{3}{2}\times10^{-3})^2 = 24\times10^{-3}$ W

یعنی اصل پایستگی انرژی برقرار است.

@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

مسأله ۲۲ فصل ۲۹)

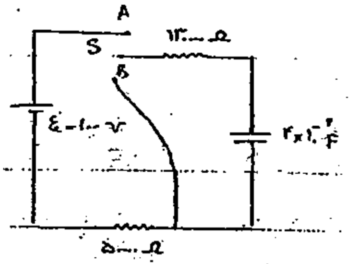


حلقه چپ: $12 - 20 I_1 - 70 I_3 = 0$

حلقه راست: $15 - 90 I_2 - 70 I_3 = 0$, $I_3 = I_1 + I_2$

از این ۳ معادله I_1 , I_2 , I_3 را پیدا کنید.

مسأله ۱۰ فصل ۲۹)



الف) R کل برای شارژ $= 120000 + 50000 = 180000\ \Omega$

ثابت زمانی شارژ $\tau = R_{شارژ}\, C = 18\times10^{4} \times 4\times10^{-6}$

$\tau = 4\times18\times10^{-2}\ sec$

ب) $q = C\varepsilon(1-e^{-t/\tau}) \rightarrow I = \frac{dq}{dt} = C\varepsilon(0-(-\frac{1}{\tau})e^{-t/\tau})$

$\rightarrow I = \frac{C\varepsilon}{\tau} e^{-t/\tau}$ (در $t=0$) $\rightarrow I = \frac{C\varepsilon}{\tau}$

$I = \frac{4\times10^{-6}\times100}{4\times18\times10^{-2}}$

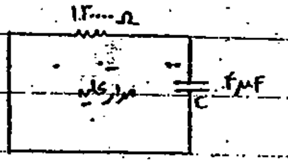
ج) $V_c = \varepsilon(1-e^{-t/\tau}) \rightarrow 50 = 100(1-e^{-t/\tau}) \rightarrow 100 e^{-t/\tau} = 100-50 = 50$

$e^{-t/\tau} = \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{t}{\tau} = \ln(0.5) \rightarrow t = -4\times18\times10^{-2} \times \ln(0.5) = \ldots\ sec$

د) انرژی ذخیره؟

شارژ کامل: $I=0$

$V_{c\,شارژ کامل} = \varepsilon \rightarrow U_{ذخیره} = \frac{1}{2}CV^2_{ذخیره} = \frac{1}{2}C\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\times4\times10^{-6}\times(100)^2\ J$



* پس از شارژ کامل کلید از A قطع و به B وصل می‌شود.

ه) ثابت زمانی تخلیه: $\tau_{تخلیه} = R_{تخلیه}\, C = 12\times10^{4}\times4\times10^{-6}$

$\tau_{تخلیه} = 12\times4\times10^{-2}\ sec$

و) $I = |I_0| e^{-t/\tau}$ تخلیه $\quad I = \frac{q_0}{\tau}e^{-t/\tau} \quad q = q_0 e^{-t/\tau} \rightarrow \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{\tau}e^{-t/\tau}$

در شارژ $q_0 = q_{0\,نهایی شارژ} = C\varepsilon = 4\times10^{-6}\times100 \rightarrow q_0 = 4\times10^{-4}\ C$

$t=0$ شروع جریان مدار تخلیه در لحظه: $I(t=0) = \frac{q_0}{\tau}\times e^{0} = \frac{q_0}{\tau} = \frac{4\times10^{-4}}{12\times4\times10^{-2}} = \frac{1}{12}\times10^{-2}\ A$

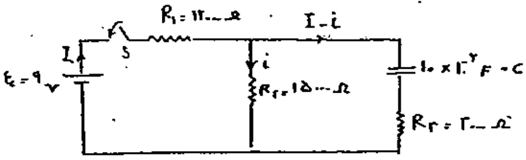
ز) در $t=1\,sec$ ولتاژ دو سر خازن در حال تخلیه چقدر است؟

$V_c(t) = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C}e^{-t/\tau}$

$\rightarrow V_c(1) = \frac{4\times10^{-4}}{4\times10^{-6}} \times e^{-\frac{1}{12\times4\times10^{-2}}} = \ldots\ V$

@jozve_iut
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

مسأله‌ی ۶۲ فصل ۲۹)



جریان‌ها و ولتاژها را در لحظه‌ی $t=0$ (که کلید متصل شد) و در لحظه‌ی $t=\infty$ حساب کنید؟

$t=0 \longrightarrow q_c = 0$

در لحظه‌ی $t=0$ که خازن بار ندارد (و حالاتی با جریان ندارد) مثل این است که R_2 و R_3 موازی باشند که اگر R معادل ترکیب موازی این دو باشد:

$$R' = 2500\,\Omega$$

$$I = \frac{9}{12000+2500} = \frac{9}{14500}\ A$$

برای $t=0$ داریم:

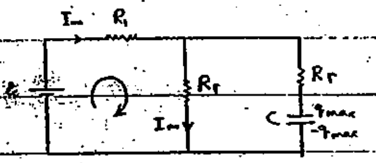
$$15000 \times i = V_c + 20000\,(I - i) \longrightarrow i = \frac{1}{4} \times \frac{9}{14500} = \frac{3}{29000}\ A$$

$$I_{R_3}\big)_{t=0} = I_c\big)_{t=0} = I - i = \frac{9-1.5}{14500} = \frac{7.5}{14500} = \frac{3}{5800}\ A$$

$$V_c(t=0) = q/C = 0\ V \qquad V_{R_1} = 12000 \times I_{t=0} = \dots\ V$$

$$V_{R_2} = R_2 i = \dots\ V \qquad V_{R_3} = R_3 (I - i) = \dots\ V$$

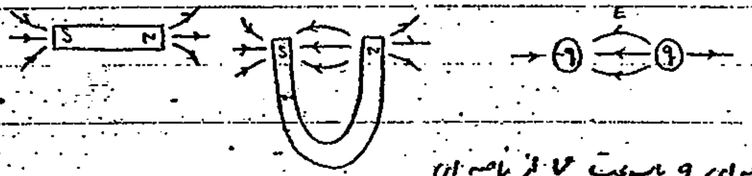
در $t=\infty$ که خازن شارژ کامل است جریان شاخه خازن صفر است.



$$I_\infty = \frac{\varepsilon}{R_1+R_2} \rightarrow V_{R_1} = R_1 \times \frac{\varepsilon}{R_1+R_2}$$

$$V_{R_2} = R_2 \times \frac{\varepsilon}{R_1+R_2} = V_c(\infty) = \frac{q_{max}}{C}$$

مسیر حرکت ذرات باردار در میدان مغناطیسی:



آزمایش نشان می‌دهد وقتی که بار نقطه‌ای q با سرعت $\vec{V}$ از ناحیه‌ای که میدان مغناطیسی آن $\vec{B}$ است بگذرد، به آن نیروی $\vec{F}_B = q\vec{V} \times \vec{B}$ وارد می‌شود.

پس $\vec{F}_B$ هم بر $\vec{V}$ عمود است و هم بر $\vec{B}$

← چون $\vec{V} = \frac{\vec{dl}}{dt}$ در این صورت:

$$\vec{F}_B = q\,\frac{\vec{dl} \times \vec{B}}{dt}$$

$$F_B \text{ کار نیروی } = \int_A^B \vec{F}_B \cdot \vec{dl} = q \int_A^B \left(\frac{\vec{dl} \times \vec{B}}{dt} \right) \cdot \vec{dl}$$

پس $\frac{\vec{dl}}{dt}$ (یا $\vec{V}$) بر $\frac{\vec{dl} \times \vec{B}}{dt}$ عمود است:

$$W_B = F_B \text{ کار نیروی } = 0$$

نیروی مغناطیسی کار انجام نمی‌دهد

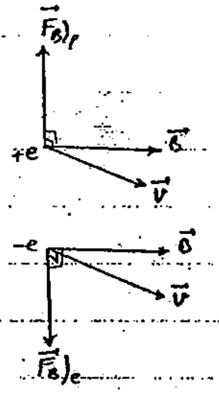
@jozve_iut

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

— کار نیروی مغناطیسی برای حرکت انتقالی ذره‌ی باردار صفر است.

$\vec{F}_B = q\vec{v}\times\vec{B} \Rightarrow F_B = |q| v B \sin\theta$ که θ زاویه‌ی بین $\vec{v}$ و $\vec{B}$ می‌باشد.

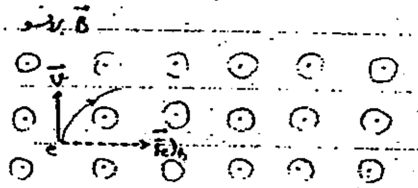
$B = \frac{F_B}{|q| v \sin\theta}$ ، در حالت خاص که $\theta = 90°$: $B = \frac{F_{B\perp}}{|q| v}$ ← تسلا (T) ، ($F_{B\perp}$ ← نیوتن (N) ، $|q|$ ← C ، v ← m/s)

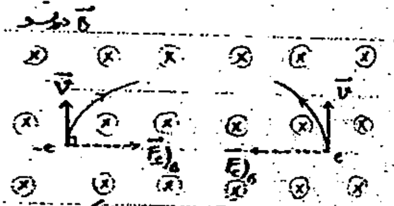


توجه: اگر $q = -e$: الکترون $\vec{F}_B = -e\vec{v}\times\vec{B}$

اگر $q = e$: پروتون $\vec{F}_B = e\vec{v}\times\vec{B}$

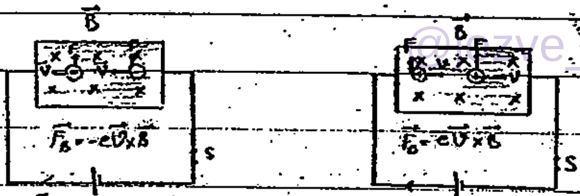
— پس $\vec{F}_B)_p = -\vec{F}_B)_e$: در خلاف جهت یکدیگر





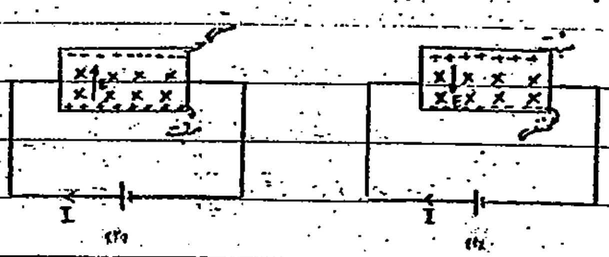
(انحراف الکترون)

آزمایش هال:



شکل ۲: بارهای متحرک (-) اند.   شکل ۱: بارهای متحرک (+) اند.

$\vec{F}_B$ های به سمت بالا سبب می‌شود عملاً شکل به صورت زیر باشد:



با ولتمتر، مثبت بودن لبه‌ی بالا را نشان می‌دهد.

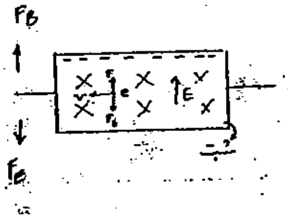
پس با آزمایش هال مثبت یا منفی بودن ذراتی که جریان را ایجاد کنند معلوم می‌سازد.
به دلیل اینکه پروتون‌ها سنگین اند و در فلزات به حرکت در نمی‌آیند و در آن‌ها پر از الکترون آزاد می‌باشد؛ نتیجه در فلزات شکل (۲) صحیح خواهد بود.

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

l عرض نوار است. عمود بر شتاب عرضی $E_H l$ ① : V_H = اختلاف پتانسیل عرضی هال

$\vec{F}_B = -e\vec{V}\times\vec{B}$ $\quad \vec{F}_E = -e\vec{E}_H$

$\vec{F}_{کل} = \vec{F}_E + \vec{F}_B = -e(\vec{E}_H + \vec{V}\times\vec{B})$



اگر $F_{کل} = 0$ باشد یعنی: $\vec{E}_H + \vec{V}\times\vec{B} = \vec{0}$ پس:

$\vec{E}_H = -\vec{V}\times\vec{B}$

$|\vec{E}_H| = VB\sin 90 = VB$ ②

از دو رابطه ① و ②: $V_B = E_H = \frac{V_H}{l}$ $\Rightarrow$ $V = \frac{V_H}{lB}$: متوسط سرعت بارهای متحرک (اختلاف پتانسیل، جهت)

* مسیر دایره ای ذرات باردار در میدان مغناطیسی یکنواخت:

باید $\vec{B}$ در همه ی نقاط دارای یک اندازه و یک جهت باشد.

- شرایط حرکت دایره ای:

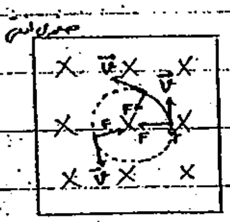
۱- میدان $\vec{B}$ یکنواخت باشد.

۲- $\vec{B}$ در امتداد قائم باشد.

۳- سرعت بار q ($\vec{V}$) در صفحه ی افقی باشد (عمود بر $\vec{B}$)

۴- در مسیری که ذره حرکت می کند هیچ اصطکاکی وجود داشته باشد.

- دلیل مسیر افقی برای ذره ای با بار q و جرم m : $W_{mg} = 0$ چون عمود بر هم اند $W_B = 0$; $W_{f_k} = 0$

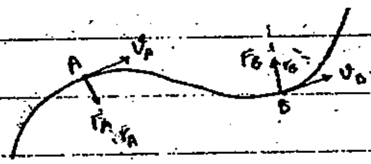


90 درجه: $\vec{F} = q\vec{V}\times\vec{B} \Rightarrow qVB\sin 90 = F$

$\longrightarrow F = qVB$

چون $\vec{B}$ یکنواخت و V هم ثابت مانده است، پس F اندازه ی ثابت خواهد داشت.

می دانیم: $F_A = m\frac{V_A^2}{r_A}$, $F_B = m\frac{V_B^2}{r_B}$



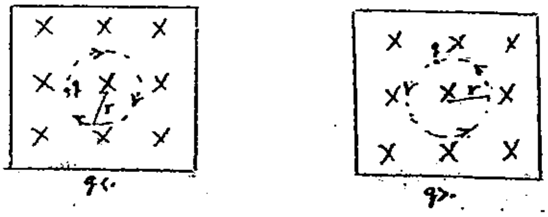
طبق رابطه ی نیروی مرکزگرا: $F_B = m\frac{V^2}{r}$ (مغناطیسی)

@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

$$\rightarrow qvB = m\frac{v^2}{r} \rightarrow r = \frac{mv}{qB} = \text{ثابت}$$

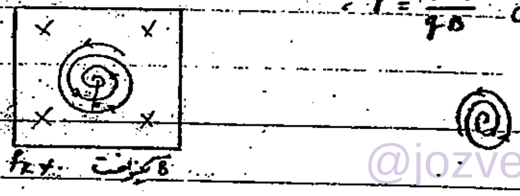
(mv ثابت؛ q ثابت، B یکنواخت)

بدلیل اینکه r ثابت است در این صورت مسیر حرکت بار، دایره خواهد بود.



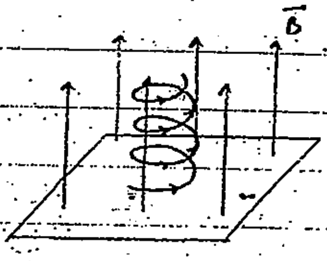
دوره: پریود: زمان یک دور زدن کامل : T = ?

$$T = \frac{\text{طول محیط}}{\text{تندی}} = \frac{2\pi r}{v} \rightarrow T = 2\pi \times \frac{\frac{mv}{|q|B}}{v} \rightarrow T = \frac{2\pi m}{|q|B}$$ → به تندی بستگی ندارد



توجه: f_k سبب کاهش v می‌شود، پس طبق رابطه‌ی $r = \frac{mv}{qB}$، r نیز کاهش خواهد یافت. (شکل روبه‌رو)

و برعکس اگر بتوانیم انرژی جنبشی را افزایش داد، اما با وجود اصطکاک هم تقلب تغییری نخواهد کرد.



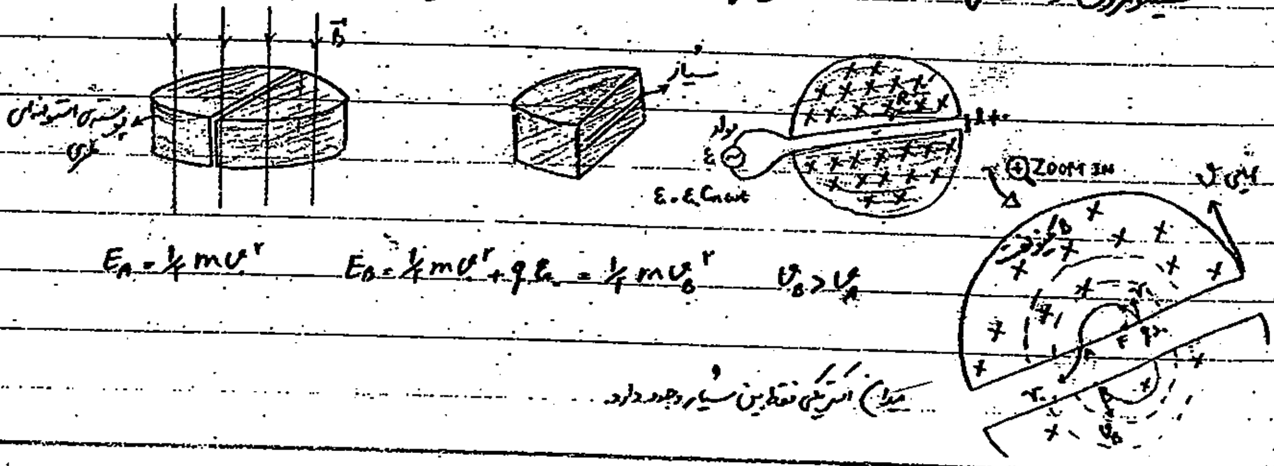
* اگر مولفه‌ی سرعت در راستای $\vec{B}$ مخالف صفر باشد، مسیر فنری می‌شود.

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{افقی}} + v_z\hat{k}$$

چون $\vec{B} = B\hat{k}$: در نتیجه

$$\vec{F}_{v_z} = \vec{B} \times (v_z\hat{k}) = 0$$

سیکلوترون دستگاهی است که به کمک آن می‌توان سرعت ذرات باردار را خیلی زیاد کرد.



$E_A = \frac{1}{2}mv^2 \qquad E_B = \frac{1}{2}mv^2 + q\varepsilon_0 = \frac{1}{2}mv_B^2 \qquad v_B > v_A$

میدان الکتریکی فقط بین سیلاز وجود دارد.

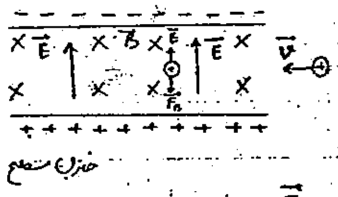
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان
@jozve_iut

اگر T مولد با $\frac{2\pi m}{qB}$ برابر باشد : $r=\frac{mv}{q}$ — $r_A < r_B$

ـ اگر در کل n دور کامل طی کرده باشد داریم :

$\frac{1}{2} m v_0^2 + \underset{\text{توجه}}{2N}(qE_0) = \frac{1}{2} m v_{نهایی}^2$ — $v_{نهایی}$ = معلوم خواهد شد

آزمایش تامسون برای اندازه‌گیری e/m



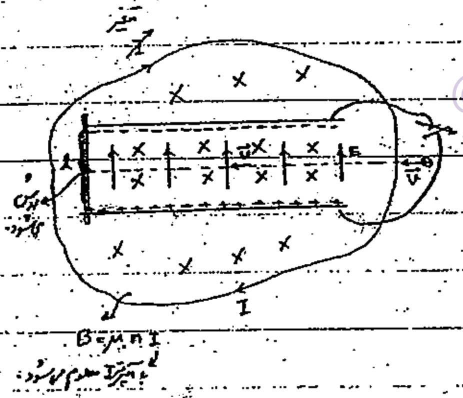
$\vec{F}_B = e\vec{v}\times\vec{B}$, $\vec{F}_E = +e\vec{E}$

اگر روی خط مستقیم به سمت چپ بیاید : $\vec{F}_B + \vec{F}_E = 0 \to e\vec{E} + e\vec{v}\times\vec{B} = 0$

$\to \vec{E} = -\vec{v}\times\vec{B} \to E = vB \to v_{ذره} = \frac{E}{B}$

فصل ۳۰ ← ۲ ـ ۱۷ ـ ۲۱ ـ ۳۲ ـ ۴۷ فصل ۳۱ ← ۸ ـ ۱۰ ـ ۱۷ ـ ۲۱ ـ ۳۲ ـ ۳۵

فصل ۳۲ ← ۵ ـ ۷ ـ ۸ ـ ۱۵ ـ ۲۰ فصل ۳۵ ← ۲ ـ ۴ ـ ۸ ـ ۱۰ ـ ۳۷



$V = lE \to E = \frac{V}{l}$

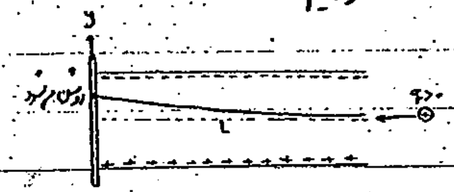
با داشتن V معلوم می‌شود.

بدین ترتیب : $v = \frac{E}{B} = \frac{V/l}{\mu_0 n I}$

v = سرعت ذره = $\frac{V}{\mu_0 n I l}$

با کم یا زیاد کردن V یا I سعی می‌کنیم نقطه وسط صفحه اسیلوسکوپ روشن شود.

در قسمت دوم آزمایش دیگر V را تغییر نمی‌دهیم (E ثابت می‌ماند) ولی I را صفر می‌کنیم ($B=0$)



$m\vec{a} = \vec{F}_E = q\vec{E} \to \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$

چون $\vec{E} = E\hat{j}$

$\to a_x = 0 , a_y = \frac{qE}{m}$ سرعت اولیه $\begin{cases} v_x = v \\ v_y = 0 \end{cases}$

$a_x = 0 \to L = vt \to t = \frac{L}{v}$

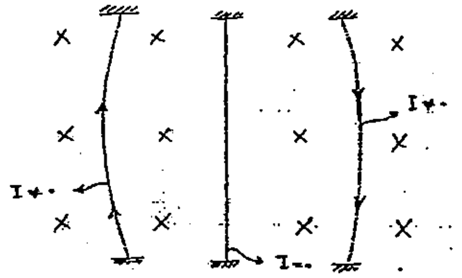
$a_y = \frac{qE}{m} \to y = y_0 + v_y t + \frac{1}{2}\left(\frac{qE}{m}\right)t^2 \to y_p = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}\times\left(\frac{L}{v}\right)^2$, $v = \frac{E}{B}$

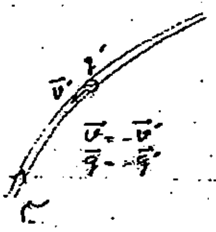
$\to y_p = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}\times\frac{L^2}{(E/B)^2} = \frac{qL^2B^2}{2mE} \to \frac{q}{m} = \frac{2y_p E}{L^2 B^2}$

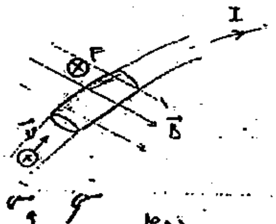
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

← که جهت بار q_p را هم با اندازه‌گیری مشخص کنیم.
اولین بار تامسون $\frac{e}{m}$ را با این روش اندازه‌گیری کرد.

نیروی وارد بر یک تکه سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی:







$F = q\,v\times B \xrightarrow{\text{در جهت}} +q\,v\times B$

$\vec{f}_{+e} = +e\vec{v}\times\vec{B} \longrightarrow f_{+p} = evB\sin\theta$

اگر n تعداد الکترون‌های آزاد در واحد حجم سیم مورد نظر باشند و چون حجم تکه سیم $dv = S\,dl$ که S سطح مقطع سیم)

$dN = n\times \overbrace{S\,dl}^{\text{حجم تکه سیم}}$: تعداد الکترون e+ در حجم تکه سیم (n: که در واحد حجم)

$dq = e\,dN \rightarrow dq = neS\,dl$. : قدر مطلق بار درون حجم تکه سیم

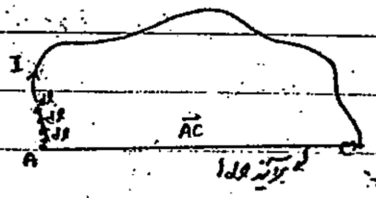
$I = \frac{dq}{dt} = neSv$

$f_{+e} = evB\sin\theta$: اندازه نیروی وارد بر dN تا $+e$ = $f_e\,dN = (evB\sin\theta)(nS\,dl)$

$\rightarrow dF = (nevS)\,B\,dl\sin\theta \rightarrow$ (اندازه نیروی وارد بر تکه) $dF = IB\,dl\sin\theta$

$\vec{dF} = I\,\vec{dl}\times\vec{B}$; dl در جهت سرعت e+ هاست.

برای شکل فوق $\vec{dF}$ درون سو است (⊗)

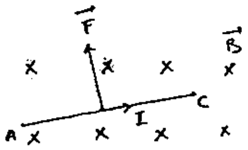


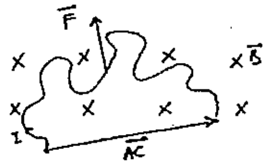
$\vec{F}_{A\to C} = \int_{A}^{C}\vec{dF} = I\int_{A}^{C}\vec{dl}\times\vec{B}$ اگر تغییرات I به dl (یعنی ثابت در امتداد dl) بستگی نداشته باشد پس I از انتگرال بیرون می‌آید.

$\vec{F}_{A\to C} = I\left(\int_{A}^{C}\vec{dl}\right)\times\vec{B} = I\,\vec{AC}\times\vec{B}$ اگر B یکنواخت باشد (همه جا موازی و ثابت اندازه)

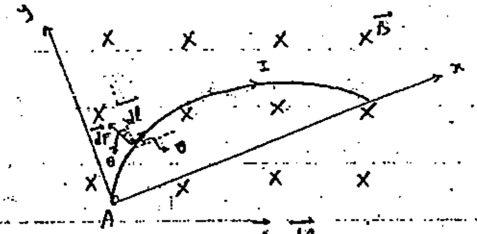
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

|AC| : فاصله‌ی بین C تا A ، (یعنی $\vec{F}_{AC}$ به طول کل سیم بستگی ندارد در صورتی که در میدان یکنواخت باشد)





* در صورتی که B یکنواخت باشد:



dl بر B عمود است.

$$d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$dl \cos\theta = dx \quad , \quad dl \sin\theta = dy$$

$$d\vec{F} = I\, dl\, B \sin 90 = I\, dl\, B$$

$$|dF_x| = -d\vec{F}\sin\theta \qquad \text{در خلاف جهت محور x ها}$$

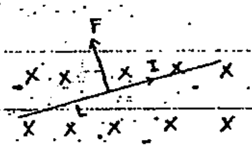
$$dF_y = dF\cos\theta \qquad \text{در جهت y ها}$$

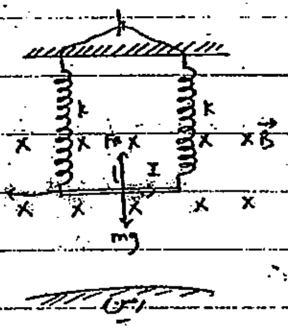
$$\rightarrow dF_x = -IB\, dl \sin\theta \quad , \quad dF_y = IB\, dl \cos\theta \longrightarrow dF_x = -IB\, dy \quad , \quad dF_y = IB\, dx$$

$$F_x = \int_{A}^{C} dF_x = -IB\int_{y_A}^{y_C} dy = -IB(y_C - y_A) \longrightarrow F_x = 0$$

$$F_y = \int_{A}^{C} dF_y = IB\int_{x_A}^{x_C} dx = IB(x_C - x_A) \longrightarrow F_y = IB\,\overline{AC}$$

نکته: اگر سیم مستقیمی عمود بر میدان یکنواخت $\vec{B}$ (سیم به طول L) باشد و از آن جریان I بگذرد عمود بر B را نیرویی به اندازه‌ی : $F_B = ILB$ به آن وارد می‌شود.





* اگر مقدار جریان I را طوری تنظیم کنیم که فنرها کشیده یا فشرده نشوند (طول عادی) باشند

$$\vec{F}_B + m\vec{g} = 0 \Rightarrow F_B = mg \Rightarrow IBL = mg$$

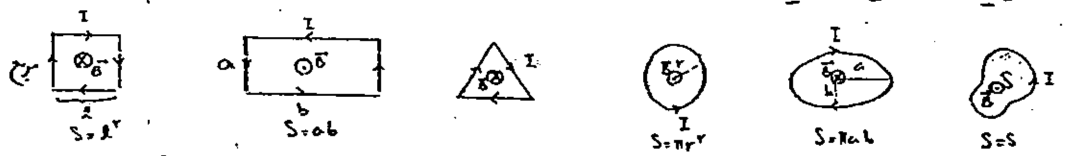
(L: طول سیم ، m: جرم سیم)

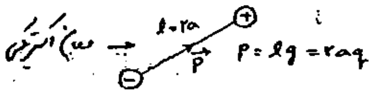
$$\longrightarrow B = \frac{mg}{IL}$$

@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

دوران یک دوقطبی مغناطیسی در میدان مغناطیسی یکنواخت :

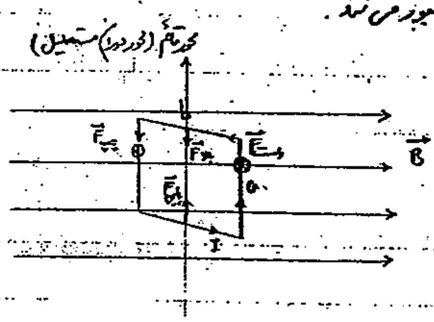
هریک از شکل های زیر یک دوقطبی مغناطیسی اند .





میدان مغناطیسی هر دوقطبی مغناطیسی را با $\vec{\mu}$ نشان می‌دهیم که هم جهت با $\vec{B}$ های درون شکل هاست و اندازه آن از رابطه ی : $\vec{\mu} = NSI$ بدست می‌آید.

N تعداد حلقه هایی است که از تک تک آن ها جریان I عبور می‌کند.



$\vec{F}_{بالا} + \vec{F}_{پایین} = 0$

زیرا $F_{بالا} = F_{پایین} = NIbB\sin\theta$ (تعداد حلقه ها)

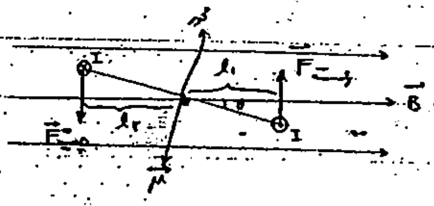
و به دلیل اینکه $\vec{F}_{بالا}$ و $\vec{F}_{پایین}$ بر محور دوران اند (یا موازی) گشتاورشان صفر خواهد بود.

$F_{چپ} = F_{راست} = NIB\sin 90 \cdot 2a$ (تعداد حلقه)

۲a اندازه طول هر ضلع که بر $\vec{B}$ عمود است.

گشتاور های $\vec{F}_{راست}$ و $\vec{F}_{چپ}$ نسبت به محور دوران هم جهت اند.

با نگاه از بالا به سمت پایین شکل زیر را می‌بینیم.



بازوی گشتاور $\vec{F}_{چپ}$ یا $\vec{F}_{راست}$ = $l_1 = l_2 = \frac{b}{2}\cos\theta$

$\tau_{راست})_{محور} = l_1 F_{راست} = (\frac{b}{2}\cos\theta) NIaB$ $\quad$ $\tau_{چپ})_{محور} = l_2 F_{چپ} = (\frac{b}{2}\cos\theta) NIaB$

هر دو هم جهت : $\tau = \tau_1 + \tau_2 \rightarrow \tau = \overbrace{N\underbrace{ab}_{S\text{ یا }A}I}^{\mu} B\cos\theta \rightarrow \tau = \mu B\cos\theta$

اما سینوس زاویه ای که $\vec{\mu}$ با $\vec{B}$ می‌سازد (α) برابر $\cos\theta$ است.

$\sin\alpha = \cos\theta \rightarrow \tau = \mu B\sin\alpha \rightarrow \vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

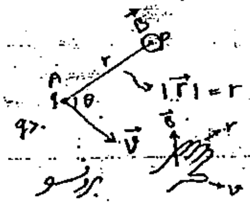
$W = \int_{\pi/2}^{\theta} \tau\, d\theta \rightarrow U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -\mu B\cos\theta$

@jozve_iut
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

میدان مغناطیسی حاصل از حرکت بارهای الکتریکی :

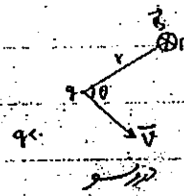
نتایج حاصل از آزمایش‌ها نشان می‌دهد وقتی بار q با سرعت v از نقطه‌ای عبور می‌کند در اطراف آن میدان مغناطیسی بوجود می‌آید بطوریکه اندازه $\vec{B}$ حاصل با $|q|$ ، v ، $\frac{1}{r^2}$ و $\sin\theta$ متناسب است که در آن r فاصله ذره از نقطه‌ای است که میدان آن $\vec{B}$ بوده و θ زاویه بین خط واصل محل بار q و محل میدان $\vec{B}$ می‌باشد.

$$B \sim \frac{1}{r^2}, |q|, v, \sin\theta \quad : \quad B \sim \frac{|q| v \sin\theta}{r^2} \qquad B = K' \frac{|q| v \sin\theta}{r^2}$$



$$B = \frac{K' |q| v r \sin\theta}{r^3} \Rightarrow \vec{B} = K' \frac{q(\vec{v} \times \vec{r})}{r^3}$$

همانگونه برای قانون کولن $E = k\frac{q\vec{r}}{r^3}$ ($\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$) داشتیم:



ثابت قانون کولن ← $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 \ MKSC$

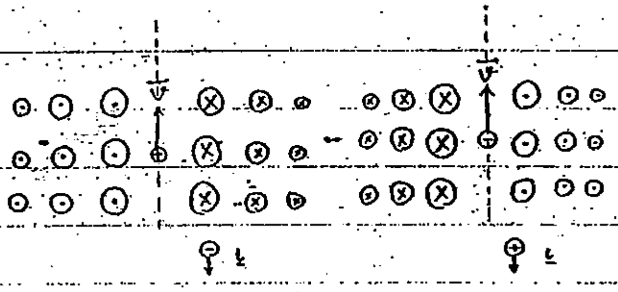
ε_0 ثابت قانون کولن

μ_0 ثابت قانون آمپر

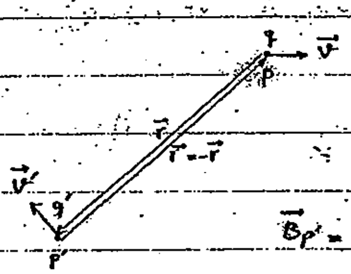
$K' = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \ MKSCT$

K' ثابت قانون بیوساوار

با توجه به : $\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \times \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$ معلوم می‌شود که اگر نقطه P روی امتداد سرعت باشد یعنی $\vec{v}$ و $\vec{r}$ بر هم منطبق باشند $\sin\theta = 0$ در این صورت در P میدان نداریم. $\vec{v} \times \vec{r} = 0 \rightarrow B = 0$



برای نیروهای مغناطیسی قانون سوم نیوتن در حالت کلی برقرار نیست. (البته در حالت خاص که $\vec{v}$ (سرعت بار q) و $\vec{v}'$ (سرعت بار q') موازی باشند قانون سوم برقرار است).



در حالت کلی : چون v ها موازی نیستند و در یک صفحه هم قرار ندارند.

$$\vec{B}_{p'} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \quad , \quad \vec{B}_p = \frac{\mu_0 q'}{4\pi} \frac{\vec{v}' \times \vec{r}'}{r'^3}$$

@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

چون $\vec{F}_q = q\,\vec{v}\times\vec{B}$

نیروی وارد بر q : $\vec{F}_q = q\vec{v}\times\vec{B}_{q'} \rightarrow \vec{F}_q = -\frac{\mu_0 q q'}{4\pi r^3}\,\vec{v}\times(\vec{v'}\times\vec{r})$

نیروی وارد بر q' : $\vec{F}_{q'} = q'\vec{v'}\times\vec{B}_q \rightarrow \vec{F}_{q'} = +\frac{\mu_0 q q'}{4\pi r^3}\,\vec{v'}\times(\vec{v}\times\vec{r})$

اگر $\vec{v}\times(\vec{v'}\times\vec{r})$ با $\vec{v'}\times(\vec{v}\times\vec{r})$ مساوی می بود؛ قانون سوم نیوتن برقرار می شد.

چون در حالت کلی $\vec{v'}\times(\vec{v}\times\vec{r}) \neq \vec{v}\times(\vec{v'}\times\vec{r})$ پس: $\vec{F}_q \neq \vec{F}_{q'}$

برای ضرب سه گانه داریم: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$

به ازای هر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ رابطه ی فوق برقرار است.

$$\vec{v}\times(\vec{v'}\times\vec{r}) = \vec{v'}(\vec{v}\cdot\vec{r}) - \vec{r}(\vec{v}\cdot\vec{v'})$$

برآیند دو بردار که یکی در امتداد $\vec{v'}$ و دیگری در امتداد $\vec{r}$ است. ↑ برابر

$$\vec{v'}\times(\vec{v}\times\vec{r}) = \vec{v}(\vec{v'}\cdot\vec{r}) - \vec{r}(\vec{v'}\cdot\vec{v})$$

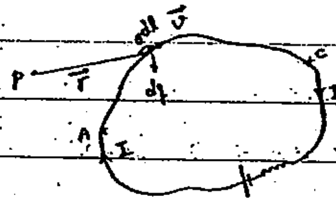
@jozve_iut

برآیند دو بردار که یکی در امتداد $\vec{v}$ و دیگری در امتداد $\vec{r}$ است.

چون در حالت کلی $\vec{v'}(\vec{v}\cdot\vec{r}) \neq \vec{v}(\vec{v'}\cdot\vec{r})$. پس در حالت کلی قانون سوم نیوتن برای نیروهای مغناطیسی که دو بار الکتریکی متحرک به هم وارد می کنند؛ برقرار نیست.

* قانون بیو-ساوار:

میدان مغناطیسی حاصل از تکه سیم $\vec{dl}$ که از آن در جهت $\vec{dl}$ جریان I عبور می کند



dq: تکه متحرک بار آزاد درون تکه سیم

میدان حاصل از حرکت dq که در نقطه ی P ایجاد می کند

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 dq}{4\pi}\frac{\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$

اما $\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$ سرعت و $I = \frac{dq}{dt}$ شدت جریان

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 dq}{4\pi}\frac{\frac{d\vec{l}}{dt}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\frac{dq}{dt}\,d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} \Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\,d\vec{l}\times\vec{r}$$ قانون بیو-ساوار

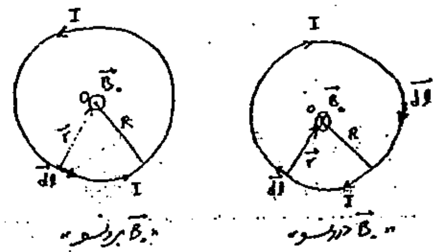
مهمترین معادله این فصل

قانون آمپر $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{داخل}}$

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

مثل محاسبات فصل میدان: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{کولار} \frac{dq}{r^2}\hat{r}$ باید با استفاده از رابطه‌ی بیوساوار $\vec{B}$ برخی از نقاط را با حل انتگرال $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{کولار} \frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$ بدست می‌آوریم.

مثال) محاسبه‌ی میدان مرکز یک حلقه:



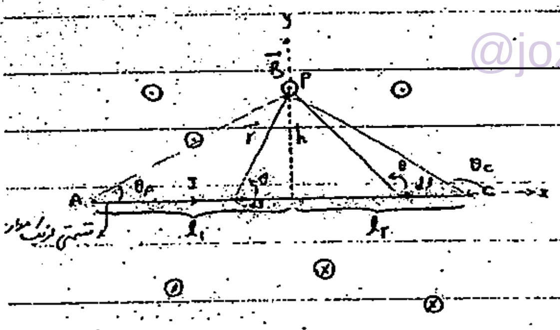
$d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$ — $d\vec{l}$ در جهت جریان I است. $\vec{r}$ بردار مکان O نسبت به $d\vec{l}$ است. $d\vec{l}\times\vec{r}$ برای جریان ساعتگرد درونسو و برای جریان پادساعتگرد برونسو است.

$$dB_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{dl.R}{R^3}\sin 90 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{dl}{R^2}$$

و چون همه‌ی dB ها هم جهت اند، اندازه‌ها جمع می‌شوند: $B_0 = \oint dB_0 = \int_{کل حلقه} dB_0 = \oint \frac{\mu_0 I\, dl}{4\pi R^2}$

$$\to B_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\oint dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\cdot 2\pi R \to B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} \qquad B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

مثال) محاسبه‌ی میدان حاصل از یک سیم مستقیم



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

طبق رابطه‌ی فوق و قاعده‌ی دست راست برای همه‌ی dl های این سیم، $d\vec{B}$ ها در جهت z ها هستند.

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dx\, r\sin\theta}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dx\sin\theta}{r^2}$$

چون همه‌ی $d\vec{B}$ ها هم جهت اند، اندازه‌ها جمع می‌شوند. $d\vec{B} = dB\,\hat{k}$

$$B = \int_A^C dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\theta_A}^{\theta_C}\frac{dx\sin\theta}{r^2}$$

$$\cot\theta = \frac{-x}{h} \to x = -h\cot\theta \to dx = h\frac{d\theta}{\sin^2\theta}$$

$$\frac{h}{r} = \sin\theta \to \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2\theta}{h^2} \quad (*)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\theta_A}^{\theta_C} h\frac{d\theta}{\sin^2\theta}\times\frac{\sin^2\theta}{h^2}\sin\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi h}\int_{\theta_A}^{\theta_C}\sin\theta\, d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi h}(\cos\theta_A - \cos\theta_C)$$

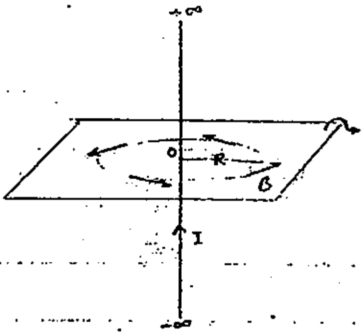
$$\to \vec{B} = \hat{k}\frac{\mu_0 I}{4\pi h}\left(\frac{l_1}{\sqrt{l_1^2+h^2}} + \frac{l_2}{\sqrt{l_2^2+h^2}}\right) \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi h}\left(\frac{l_1}{\sqrt{l_1^2+h^2}} + \frac{l_2}{\sqrt{l_2^2+h^2}}\right)\hat{k}$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

در مثال قبل اگر:

$l_1 = \infty \to \theta_1 = 0$ ، $l_2 = \infty \to \theta_2 = +\pi$

پس $\Rightarrow$ $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi h}$ $\leftarrow$ برای سیم طویل در بی‌نهایت

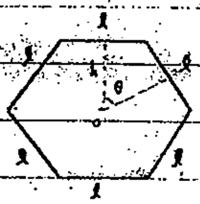


$B_{محیط} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$

حالت خاص: اگر P روی عمود منصف سیم به طول l باشد: $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi h} \times 2 \times \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{\frac{l^2}{4}+h^2}} = \frac{\mu_0 I l}{4\pi h\sqrt{\frac{l^2}{4}+h^2}}$$

مثال) مرکز یک n ضلعی منتظم:



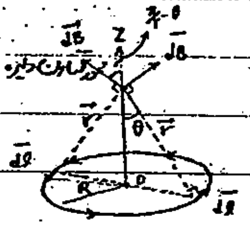
$B_0 = \frac{\mu_0 I n l}{4\pi h\sqrt{\frac{l^2}{4}+h^2}}$ — میدان مرکز برای n ضلعی منتظم

چون دایره یک ∞ ضلعی منتظم است: $n \to \infty$ ، $l \to 0$ و شعاع دایره $h \to R$

و: $nl = 2\pi R$: محیط دایره

$$B_0 = \frac{\mu_0 I \times 2\pi R}{4\pi R\sqrt{0+R^2}} = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

مثال) میدان مغناطیسی نقاط روی محور تقارن حلقه‌ی دایره‌ای شکل:



با رسم فضای صحیح به این نتیجه می‌رسیم که مولفه‌های افقی dB ها حذف می‌شوند

و مولفه‌ها در راستای محور تقارن با هم جمع می‌شوند

$B_x = B_y = 0$

$$B = B_z = \int_{حول دایره} dB_z = \oint dB\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right), \quad dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\vec{dl}\times\vec{r}}{r^3}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{dl\times r\sin 90}{r^3}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{dl}{z_p^2+R^2}\times\frac{R}{\sqrt{z_p^2+R^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\times\frac{R}{(z_p^2+R^2)^{3/2}}\oint_{محیط} dl$$

$$\to \vec{B}_{حلقه} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\times\frac{R}{(z_p^2+R^2)^{3/2}}\times 2\pi R\,\hat{k} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z_p^2+R^2)^{3/2}}\hat{k}$$

@jozve_iut

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

در حالت خاص $z=0$ ، P بر نقطه‌ی O منطبق است:

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I R^2}{2R^3}\hat{k} = \frac{\mu_0 I}{2R}\hat{k}$$

برای N دور حلقه و چون: $\vec{\mu} = N I \pi R^2 \hat{k}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{\mu}}{2\pi (R^2+z^2)^{3/2}}$$

و برای $z=0$:

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 \vec{\mu}}{2\pi R^3}$$

مثال) روی سطح دیسکی نارسانا بار مثبت با چگالی سطحی یکنواخت σ توزیع شده است. اگر این دیسک حول محور تقارن خود با سرعت زاویه‌ای ω دوران کند میدان مغناطیسی مرکز آن را پیدا کنید؟

سطح حلقه‌ی فرضی : $ds = 2\pi r\, dr$

بار حلقه‌ی فرضی : $dq = \sigma ds = \sigma \times 2\pi r\, dr$

بار dq در T ثانیه ($T = \frac{2\pi}{\omega}$) یک دور کامل می‌زند. پس شدت جریانی که باید به آن نسبت دهیم به صورت زیر است:

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\sigma \times 2\pi r\, dr}{\frac{2\pi}{\omega}} \Rightarrow dI = \sigma\omega r\, dr$$

لذا میدان مغناطیسی حاصل از این dI در مرکز دیسک به صورت زیر است: (با استفاده از فرمول مرکز حلقه)

داریم: $d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 dI}{2r}\hat{k} = \frac{\mu_0 \hat{k}}{2r}\times \sigma\omega r\, dr \rightarrow \vec{B}_0 = \int_{r=0}^{r=R} d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 \sigma\omega\hat{k}}{2}\int_0^R dr \Rightarrow$

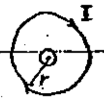
$$\vec{B}_0 = \frac{1}{2}\mu_0 \sigma\omega R\hat{k}$$

@jozve_iut

مثال) ممان مغناطیسی دیسک فوق را هم محاسبه کنید؟

(یک دور حلقه) $\mu = 1\times \pi r^2 \times I \Rightarrow \vec{\mu} = \pi r^2 I\hat{k} \Rightarrow d\vec{\mu} = (\pi r^2\hat{k})\, dI$

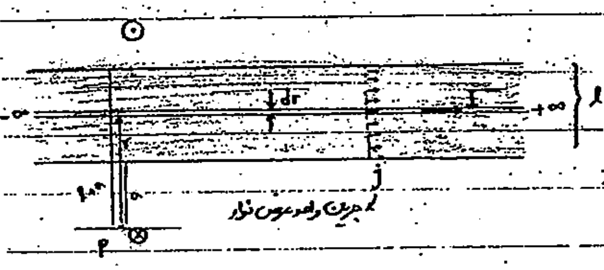
$\rightarrow d\vec{\mu} = (\pi r^2\hat{k})(\sigma\omega r\, dr)$



$$\vec{\mu} = \int_{r=0}^{R} d\mu = \hat{k}\pi\sigma\omega\int_0^R r^3 dr = \hat{k}\pi\sigma\omega \times \frac{1}{4}R^4 \rightarrow \vec{\mu} = \frac{1}{4}\pi\sigma\omega R^4\hat{k}$$

$$\Rightarrow \frac{B_0}{\mu} = \frac{\frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega R}{\frac{1}{4}\pi\sigma\omega R^4} \rightarrow B_0 = \frac{2}{\pi R^3}\mu_0 \rightarrow \vec{B}_0 = \frac{2}{\pi R^3}\vec{\mu}$$

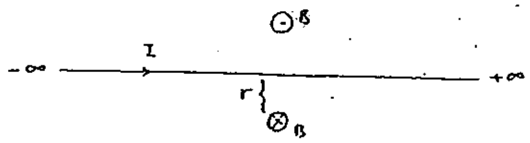
مثال دیگری برای جمع‌بندی) از نواری رسانا با عرض l جریان I (با توزیع یکنواخت) عبور می‌کند (نوار طویل است). میدان مغناطیسی در نقطه‌ای در صفحه‌ی نوار را پیدا کنید؟



(چگالی جریان) جریان واحد عرض نوار : $j = \frac{I}{l}$

ابتدا ثابت می‌کنیم که میدان حاصل از یک سیم بی‌نهایت طویل و مستقیم با جریان I در آن نقطه در فاصله‌ی r از آن برابر: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut



ثانیاً برای نوار فرضی که $a < r < a+l$ داریم:

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r}$$

که در آن $dI = j\,dr = \frac{I}{l}dr$ می‌باشد.

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi r}\left(\frac{I}{l}dr\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi l}\times\frac{dr}{r}$$

چون P روی صفحه‌ی نوار است $\vec{dB}$ ها هم‌جهت اند.

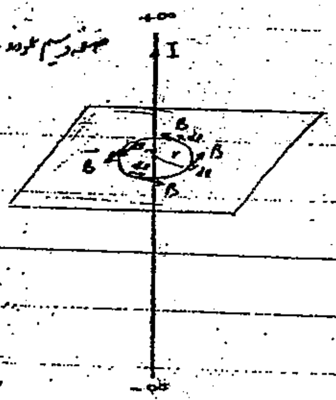
$$B = \int_{r=a}^{r=a+l} dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi l}\int_a^{a+l}\frac{dr}{r} \rightarrow B_{\text{نقطه‌ی روی نوار}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi l}\ln\left(\frac{a+l}{a}\right)$$

در زیر نوار درون‌سو و در بالای آن برون‌سو

قانون آمپر:

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I$$

حال به کمک میدان سیم بی‌نهایت طویل رابطه‌ی آمپر را ثابت می‌کنیم:



$$B_{\text{سیم}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

قبلی اثبات با روش بیوساوار داریم:

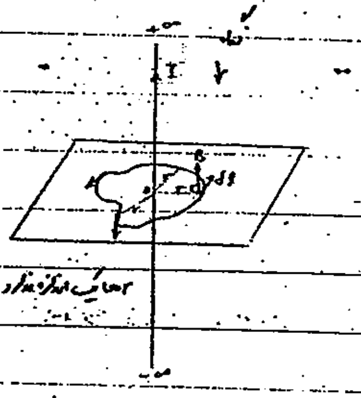
$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \oint B\,dl\cos(0) = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r}dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\oint dl_{\text{محیط دایره}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\times 2\pi r = \mu_0 I$$

@jozve_iut

ولی $\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I$ یک رابطه‌ی کلی است (همان‌طور که $\varepsilon_0\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = q$ کلی بود) و نتایج حاصل از آن با تجربه (آزمایش و ...) مطابقت دارد.

← برای منحنی کلی‌تر هم اثبات می‌کنیم



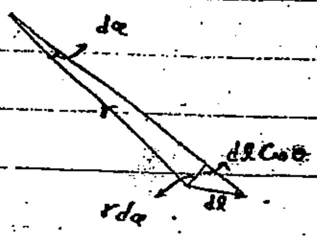
$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\times dl\cos\theta$$

متغیر: r های متفاوت هستند.

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint\frac{dl\cos\theta}{r}$$

اما قبل از اثبات رابطه، زاویه‌ی فضایی جزئی ثابت کردیم که

$$\frac{dl}{r}\cos\theta = d\varphi =$$ جزء کوچک زاویه‌ی مرکزی

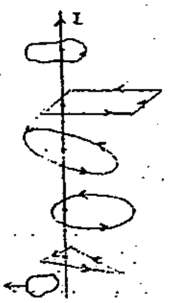


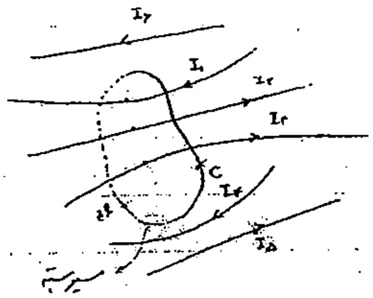
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

در ادامه: و چون $\oint d\varphi = 2\pi$ (رادیان) ← مسیر بسته را میتوان کامل طی کرده باشیم.

$$\Rightarrow \oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\times 2\pi = \mu_0 I$$

در شکل راست، برای همه قانون آمپر برقرار است.





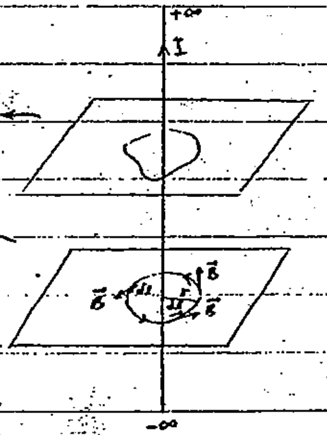
با توجه به شکل بالا (سمت چپ): اگر انگشتان بسته دست راست در جهت حرکت روی منحنی باشد (در جهت $\vec{dl}$ ها)

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 (I_3 - I_1 - I_2)$$

و چون I_4 ، I_5 و I_6 از داخل منحنی بسته ی C عبور نکرده اند، آنها را در سمت راست رابطه وارد نکرده ایم.

* همان طور که معمولاً سطوح گوسی فرضی بودند (غیر واقعی) منحنی های بسته ی آمپر هم معمولاً فرضی (غیر واقعی) اند.

مثال) اثبات رابطه ی $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ (که مربوط به سیم بی نهایت طویل است) ← به کمک قانون آمپر و بدون استفاده از قانون بیو-ساوار



$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I$ صحیح است. ولی با منحنی بسته ی کلی نمی توان B را پیدا کرد. ←

انتخاب دایره ای که در صفحه ی عمود بر سیم حامل جریان I باشد و مرکز آن دایره محل تلاقی سیم و صفحه باشد، ← امکان پذیر خواهد بود.

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I$$

تقارن استوانه ای جهت $\vec{B}$ های دور محیط دایره را مماس بر محیط دایره نشان می دهد.

$$\oint B\,dl\cos(0) = \mu_0 I$$

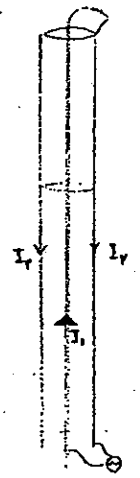
چون نقاط روی محیط دایره تا سیم همگی یک فاصله دارند پس B ها یکسان اند.

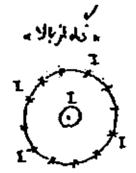
$$B\oint dl = \mu_0 I \rightarrow B\times 2\pi r = \mu_0 I \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

سیم طویل هم محور مستقیم:

a = شعاع پوسته‌ی استوانه‌ای نازک





مثال ۱) B را برای دو ناحیه‌ی $r < a$ (داخل) و $r > a$ (خارج) پیدا کنید؟

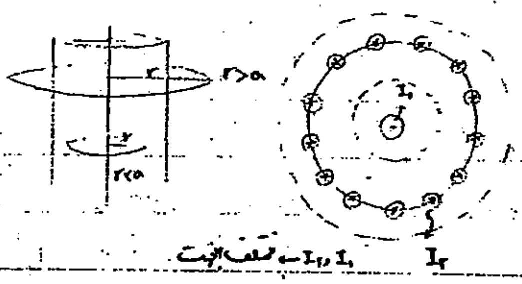
وقتی سیم داخلی و پوسته‌ی خارجی اجزای یک مدار باشند عقربه‌ی مغناطیسی در خارج $\vec{B}$ را صفر تشخیص می‌دهد.

۱- برای داخل که $r < a$ است داریم:

$\oint \vec{B_1} . \vec{dl} = \mu_0 (+I_1)$ ← هم جهت با شست دست است

$\vec{B}$ ها مماس بر دایره‌اند.

$$B_1 \oint dl = \mu_0 I_1 \rightarrow B_1 = B_{r<a} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$



$I_1 = I_2$

۲- برای خارج که $r > a$ است داریم:

$\vec{B_2}$ و $\vec{dl}$ ها هم جهت‌اند.

$$\oint \vec{B_2} . \vec{dl} = \mu_0 (+I_2 - I_1) = 0$$

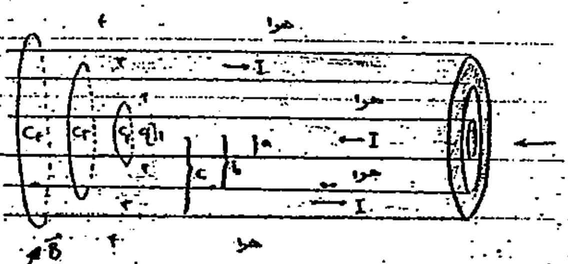
($+I_2$: در جهت شست، $-I_1$: در خلاف جهت شست)

$$\oint B_2 \, dl \times 1 = 0$$

و چون B_2 ها یک اندازه‌اند (زیرا دایره‌های هم‌مرکز و دایره‌ی آمپر هم مرکز و در یک صفحه‌اند):

$B_2 \times 2\pi r = 0$ (چون $2\pi r \neq 0$) $\xrightarrow{پس}$ $B_2 = 0$

به همین علت است که برای رشته‌های حامل جریان از کابل هم محور استفاده می‌شود.

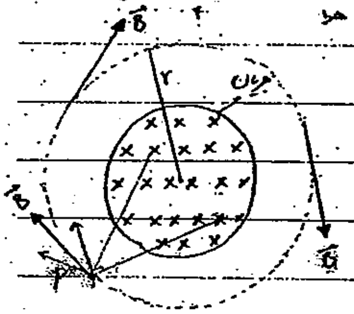


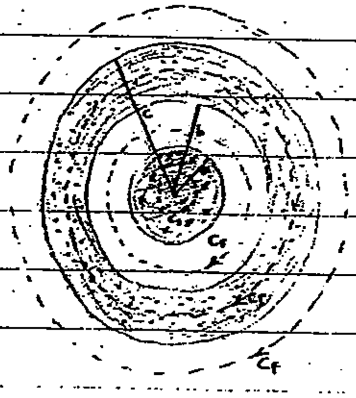
مثال ۲) I روی سطح πa^2 و نیز روی سطح $\pi(c^2 - b^2)$ یکنواخت توزیع شده است.

چگالی سطحی جریان استوانه داخلی: $J_1 = \dfrac{I}{\pi a^2}$

چگالی سطحی پوسته استوانه: $J_2 = \dfrac{I}{\pi (c^2 - b^2)}$

با نگاه در جهت I استوانه داخلی





کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

$$\oint \vec{B_1}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \times \left(\frac{I}{\pi a^2}\times \pi r^2\right)$$ ← B_1 مماس بر دایره است → $$\oint B_1\, dl \times 1 = \mu_0 \frac{I}{a^2} r^2$$

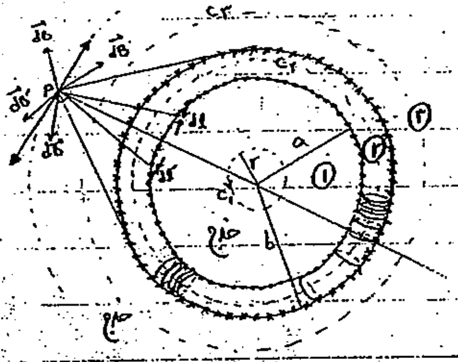
روی محیط دایره $\vec{B_1}$ یک اندازه است:

$$B_1 \times 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{a^2} r^2 \rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r$$

$$\oint \vec{B_2}\cdot\vec{dl} = \mu_0 (I) \rightarrow B_2 \times 2\pi r = \mu_0 I \rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\oint \vec{B_3}\cdot\vec{dl} = \mu_0\left(I - \frac{I}{\pi(c^2-b^2)}\pi(r^2-b^2)\right) = \mu_0 I \times \frac{c^2-r^2}{c^2-b^2} \rightarrow B_3 \times 2\pi r = \mu_0 I \times \frac{c^2-r^2}{c^2-b^2} \rightarrow B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(c^2-b^2)}\cdot\frac{c^2-r^2}{r}$$

$$\oint \vec{B_4}\cdot dl = \mu_0 (I-I) = 0 \rightarrow B_4 \times 2\pi r = 0 \rightarrow 2\pi r \neq 0 \rightarrow B_4 = 0$$



تورئید (چنبره، تیوپ):

با توجه به شکل روبه‌رو اگر در خارج میدان وجود داشته باشد الزاماً باید مماس بر دایره‌های هم مرکز با تیوپ باشند.

توجه: مجموع بردارهای $\vec{B}$ در خارج صفر خواهد شد. الزاماً برای دو نقطه B یکسان نیست. (شکل روبه‌رو)

برای $r<a$ داریم:

$$\oint \vec{B_1}\cdot\vec{dl} = \mu_0 (0) \rightarrow B_1 \times \overset{\text{مخالف صفر}}{\overbrace{2\pi r}} = 0 \rightarrow B_1 = 0$$

چون $\vec{B_1}$ مماس بر دایره است و هم جهت dl

و اگر N حلقه سیم (بصورت فشرده) داشته باشیم برای ناحیه‌ی ② (داخل تیوپ) باید نوشت:

$a<r<b$: $$\oint_{c_2} \vec{B_2}\cdot\vec{dl} = \mu_0 (NI)$$ c_2 دایره هم مرکز با تیوپ

چون B_2 مماس بر چنین دایره‌ای است:

$$B_2 \times 2\pi r = \mu_0 NI \rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

در صورتی که $b-a \ll a, b$:

$$\text{تعداد دور حلقه‌ها در واحد طول} = n = \frac{N}{\text{طول استوانه}} \simeq \frac{N}{2\pi r}$$

پس: $B \simeq \mu_0 n I$

برای $r>b$: فرض‌هایی که باشند جریان‌شان مخالف جهت اند

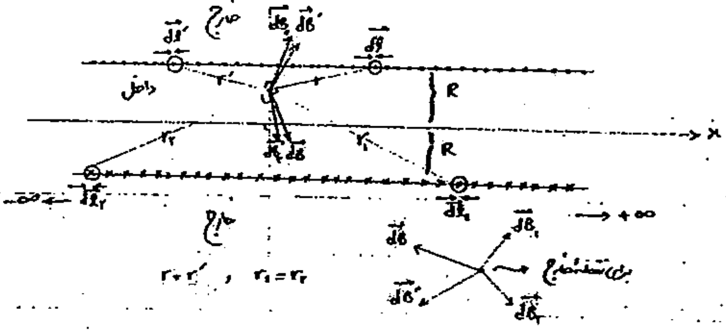
$$\oint_{c_3} \vec{B_3}\cdot\vec{dl} = \mu_0 (NI - NI) \rightarrow B_3 = 0$$

نقطه‌هایی که با نسبت دست راست هم جهت اند

@jozve_iut
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

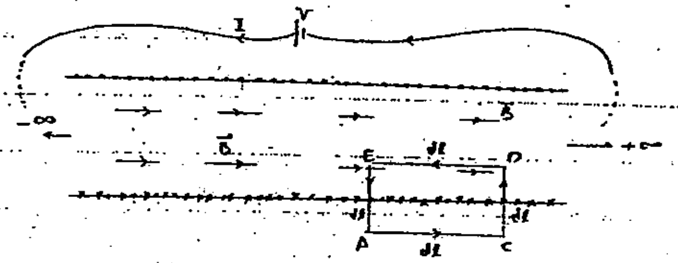
سیملوله‌ی ایده آل:

سیملوله‌ای استوانه‌ای شکل و بی‌نهایت طویل با حلقه‌های فشرده و یکنواخت.



با توجه به شکل برآیند $\vec{dB}_1$ و $\vec{dB'}$ و $\vec{dB}_2$ و $\vec{dB}$ به موازات محور سیملوله است.

$n =$ تعداد دور حلقه‌ی سیم‌لوله در واحد طول



$B_{خارج} = 0$: زیرا در خارج سیملوله‌ی ایده آل عقربه‌ی مغناطیسی در امتداد شمال و جنوب مغناطیسی قرار می‌گیرد.

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0(-n\overline{AC}\, I) \rightarrow \int_A^C \vec{B}_{خارج}\cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_D^E \vec{B}_{داخل}\cdot d\vec{l} + \int_E^A \vec{B}\cdot d\vec{l} = -\mu_0 n\overline{AC}\, I$$

(قانون جهت دست راست — تعداد کل حلقه‌های داخل مسیر بسته — $\theta = 90$ — مخالف جهت)

$$\Rightarrow \int_D^E B_{داخل}\, dl \cos(180) = -\mu_0 n\overline{AC}\, I$$

چون نقاط از D تا E شبیه‌اند (روی امتداد موازات محور) پس $\vec{B}$ در این نقاط یک اندازه‌اند. طول ED با طول AC برابر است.

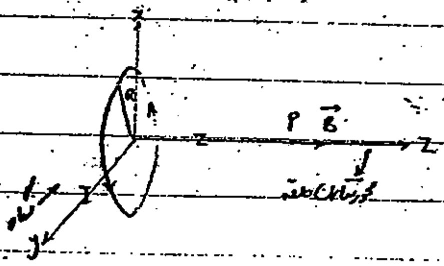
$$\Rightarrow -B_{داخل}\int_D^E dl = -\mu_0 n\overline{AC}\, I \rightarrow -B\overline{AC} = -\mu_0 n\overline{AC}\, I \Rightarrow B = \mu_0 n I$$

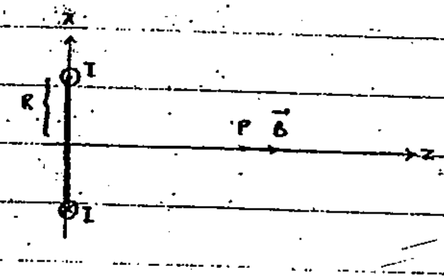
مربوط به همه‌ی نقاط داخل

پس در داخل $\vec{B}$ سیملوله ایده آل یکنواخت است. (موازی و یک اندازه)

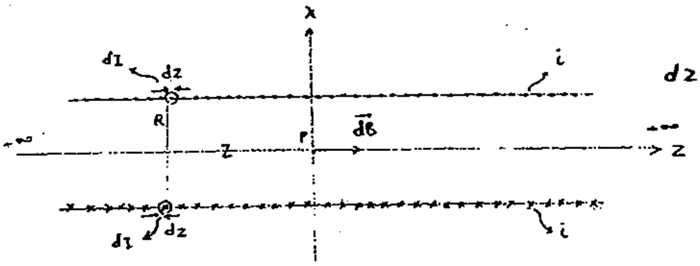
با روش بیوساوار میدان حاصل از یک دایره را روی محور دایره پیدا کردیم

$$B_{\text{روی محور حلقه دایره‌ای شکل}} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}$$





@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut



dz = تعداد حلقه‌ای منطبق بر $dz = dN = n\,dz$

$dI = i\,dN = i\,n\,dz$

لذا میدان حاصل از این dI ها در نقطه‌ی P بصورت زیر خواهد بود :

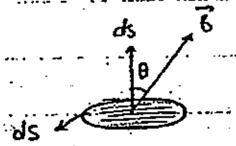
$$dB = \frac{\mu_0 R^2 dI}{2(R^2+z^2)^{3/2}}$$

← همه‌ی dB های روی محور هم جهت اند .

$$B_{\text{محور}} = \int_{z=-\infty}^{z=+\infty} dB = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 R^2 i n\, dz}{2(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\mu_0 R^2 n i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\mu_0 R^2 n i \left(\frac{2}{R^2}\right)$$

$$\Rightarrow B_{\text{محور}} = \mu_0 n i$$

* محاسبه‌ی شار الکتریکی :



شار مغناطیسی سطح جزئی ds : $d\varphi_B = \vec{B}\cdot\vec{ds}$

شار مغناطیسی سطح بزرگ S : $\varphi_B = \int_S \vec{B}\cdot\vec{ds}$

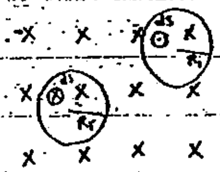
برای شار الکتریکی داشتیم ← $d\varphi_E = \vec{E}\cdot\vec{ds}$

اگر B یکنواخت باشد :

$$\varphi_B = \int_S B\,ds\cos\theta = B\int_S ds\cos\theta$$

اگر در تمام نقاط یک θ داشته باشیم :

$$\varphi_B = B\cos\theta\int_S ds = (B\cos\theta)S = \vec{B}\cdot\vec{S}$$

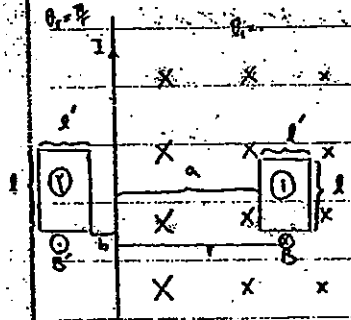


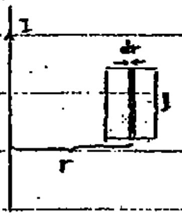
$\varphi_1 = \pi R_1^2 B\cos(\pi) = -\pi R_1^2 B < 0$

$\varphi_2 = \pi R_2^2 B\cos(0) = \pi R_2^2 B > 0$

اگر سطح دایره R با صفحه‌ی شکل زاویه‌ی ۶۰ می‌سازد ($\vec{ds}$ با $\vec{B}$ زاویه‌ی ۶۰) : $\varphi = \pi R^2 B \times 1/2$

← ولی در این استثنا B های غیر یکنواخت حتماً جواب را باید با انتگرال گیری پیدا کرد .





@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

برای شکل ① داریم :

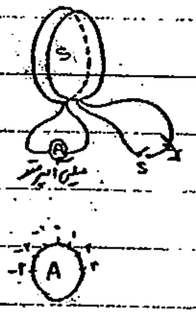
$$\varphi_{1B} = \int_{r=a}^{r=a+l'} \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int_a^{a+l'} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\, l\, dr \times 1 = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\int_a^{a+l'}\frac{dr}{r}$$

$$\varphi_{1B} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\ln\left(\frac{a+l'}{a}\right) \rightarrow$$ به همین ترتیب : $$\varphi_{2B} = -\frac{\mu_0 I l}{2\pi}\ln\left(\frac{b+l'}{b}\right)$$

توجه : اگر صفحه‌ی مستطیل با صفحه‌ای که ⊗ها یا ⊙ها در آن اند زاویه‌ی دیگری بسازد (θ) باید در $\cos\theta$ ضرب شود :

* قوانین لنز و فارادی :

طبق قانون لنز اگر شار مغناطیسی یک سطح نسبت به زمان کم یا زیاد شود : $\frac{d\varphi_B}{dt} \neq 0$ یک نیروی محرکه القائی دور محیط آن سطح بوجود می‌آید بطوری که اگر مدار بسته‌ای به دور آن سطح ایجاد کنیم ، در آن جریان القائی بوجود می‌آید.



اگر I ثابت باشد آنگاه B نیز مقداری ثابت خواهد بود ، در نتیجه :
$\varphi_B = cte$

بنابراین عقربه‌ی میلی آمپر متر صفر را نشان می‌دهد.

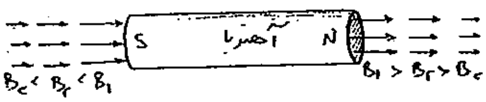
در لحظه‌ی وصل کردن کلید S که I از صفر به مثلاً 2mA تبدیل می‌شود (از 0 تا 2 تغییر است) B نیز تغییر خواهد شد ، در نتیجه φ_B تغییر و عقربه‌ی میلی آمپر حرکت می‌کند.

اما در صورتی که $I = 2mA = cte$ باز B ثابت است یعنی شار ثابت و عقربه روی صفر خواهد بود.
در لحظه‌ی قطع کلید که I از 2 به 0 تغییر است عقربه در جهت عکس حالت وصل منحرف می‌شود و بعد روی صفر برمی‌گردد.

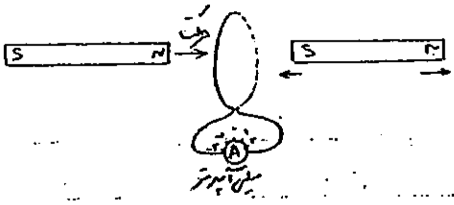
اما در موقع وصل بودن کلید اگر ولتاژ باتری مثلاً از 5 ولت به صورت تا 15 ولت افزایش یابد همواره عقربه سمت راست منحرف می‌شود و نیز در صورتی که ابتدا از 15 تا 5 ولت کاهش دهیم عقربه به سمت چپ منحرف خواهد شد.

@jozve_iut

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

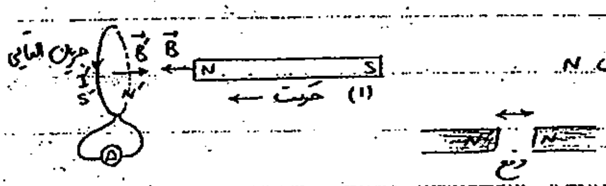


* با حرکت آهنربا به سمت راست و چپ شار سطح πR^2 زیاد و کم می‌شود، پس نیروی محرکه‌ی القایی پیدا می‌شود در مدار بسته جریان القایی خواهیم داشت.

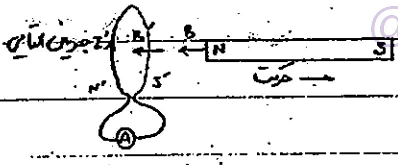


* اگر حرکت به سمت راست صورت گیرد، عقربه راست منحرف خواهد شد و بالعکس
- برای عدم حرکت آهنربا در سطح، عقربه روی صفر است.

صحبت قانون لنز: جهت جریان القایی طوری است که با عامل ایجاد کننده‌ی خودش مخالفت می‌کند.



* اگر $\vec{B}$ و $\vec{B'}$ مخالف الجهت باشند، N مقابل N آهنربا را دفع می‌کند (مخالف)



* باید $\vec{B'}$ طوری باشد که حلقه آهنربا را جذب کند (مخالف با دور شدن آهنربا)
- برای کاهش شار، جهت $\vec{B}$ و $\vec{B'}$ یکی می‌شود (مخالف با کاهش شار مغناطیسی)

نکته: شار مغناطیسی حلقه‌ای که از آن جریان القایی عبور می‌کند در محاسبات مربوط به قانون فارادی مهم است.

نکته: برای اینکه در محاسبات $\mathcal{E}$ (نیروی محرکه‌ی القایی که جریان القایی I' را سبب می‌شود) مثبت بدست آید (مثلاً: $0/2 = A$) باید جهت $\vec{ds}$ را هم جهت با $\vec{B'}$ (میدان القایی) انتخاب کنیم.

$$\Phi_B = \int_{\text{سطح حلقه}} \vec{B}\cdot\vec{ds} \longrightarrow \text{هم جهت با } \vec{B'}$$

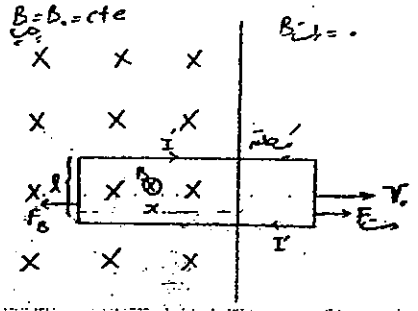
صحبت قانون فارادی:
$$\mathcal{E} = \left|\frac{d\Phi_{B_{کل}}}{dt}\right|$$

که Φ_B شار مغناطیسی همه حلقه‌های مدار القایی باشد. $\Phi_{B_{کل}} = N\Phi_{B_1}$

مثلاً اگر ۱۰ حلقه سیم روی هم بسته شده باشد $\Phi_{B_{کل}} = 10\,\Phi_{B_1}$

@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

$$\mathcal{E}' = -\frac{d\Phi_{B,\text{ل}}'}{dt} \longrightarrow \mathcal{E}' = -N\frac{d\Phi_{B_1}}{dt}$$



رابطه‌ی $\mathcal{E}' = -\frac{d\Phi_B'}{dt}$ با اصل پایستگی انرژی مطابقت دارد.

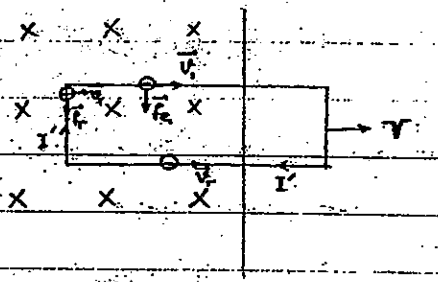
$|\Phi| = l \times B$

طبق قانون لنز $\vec{F}_B$ در خلاف جهت $\vec{F}_{\text{دست}}$ است.

$$\vec{F}_B = I'\vec{l} \times \vec{B}$$

چون I' طبق قانون لنز ساعتگرد است باید $\vec{B}'$ درونسو باشد.
($\vec{B}$ و $\vec{B}'$ برای خارج کردن مستطیل از میدان هم‌جهت اند)

اگر نیروی دست برعکس شود، $\vec{F}_B$ هم برعکس شده. ولذا I' پادساعتگرد می‌شود (قانون لنز). پس $\vec{B}$ و $\vec{B}'$ مختلف الجهت خواهند بود.



$\vec{f}_1 \leftarrow$ عمود بر امتداد جریان

$\vec{f}_2$ هم در امتداد جریان نیست.

$$\vec{f}_{e_{1,2}} = -e\vec{V}_{1,2} \times \vec{B}$$

$$-\vec{V}_{1,2} \longleftarrow \vec{V}_{1,2} \quad \text{یا}$$

نیروی: $\vec{f}_{e_2} = -e\vec{V} \times \vec{B}$ برای الکترون‌های درون یک سیم سمت چپ به طرف پایین می‌باشد. پس الکترون داخل این سیم را در خلاف جهت جریان I' حرکت می‌دهد.

* طبق اصل پایستگی انرژی اگر سیم‌ها مقاومت نداشته باشند، باید نوشت:

$P_{\text{دست}} = P_{\mathcal{E}}$: توان تولیدی مدار = توان وارد شده به سیستم توسط دست شخص = $\vec{F}_{\text{دست}} \cdot \vec{V}$

$$\hookrightarrow \mathcal{E}'I' = F_{\text{دست}} \cdot V \cos(0) = F_{\text{دست}} V \quad (*)$$

چون $\vec{V} = cte \leftarrow$

$$\vec{F}_B + \vec{F}_{\text{دست}} = 0$$

$$\Rightarrow F_{\text{دست}} = F_B = |I'\underbrace{\vec{l} \times \vec{B}}_{\text{عمود بر این صفحه}}| = I'lB\sin(90) = I'lB$$

بنابراین در ادامه‌ی رابطه‌ی (*):

$$\mathcal{E}'I' = (I'lB)V \longrightarrow \mathcal{E}' = lBV$$

$l \leftarrow$ طول سیمی است که داخل میدان قرار دارد.

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

(مثبت) $v = \left|\frac{dx}{dt}\right|$

برای خروج مستطیل معلوم است که $\frac{dx}{dt} < 0$ ، پس : $v = -\frac{dx}{dt}$ ، بنابراین :

$\varepsilon' = \frac{d\varphi_B}{dt} \rightarrow \varepsilon' = -\frac{d(xlB)}{dt} \rightarrow$ l و B از تغییر زمان ثابت اند . $\varepsilon' = -lB\frac{dx}{dt}$

و در این مسئله می دانیم : $\vec{B}, d\vec{s} \rightarrow$ هم جهت ، $\varphi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$

← اما اگر N دور سیم رسانا به دور مستطیل بسته شده باشد باید نوشت : $\varepsilon' = -N\frac{d\varphi_{B_1}}{dt}$

نتیجه ی مهم : قانون لنز و فاراده دقیقاً با اصل پایستگی انرژی مطابقت دارند .

برعکس ← با استفاده از رابطه ی $\varepsilon' = -\frac{d\varphi_B}{dt}$ هم به راحتی جواب $\varepsilon' = lBv$ بدست می آید .

در شکل قبل برای خروج مستطیل که $\vec{B}$ و $\vec{ds}$ هم جهت اند (صدق قانون لنز) :

$\varphi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_s B\,ds\cos(0) = B\int_s ds = B(lx) + 0 \longrightarrow \varphi_B = Blx$ (B : ثابت)

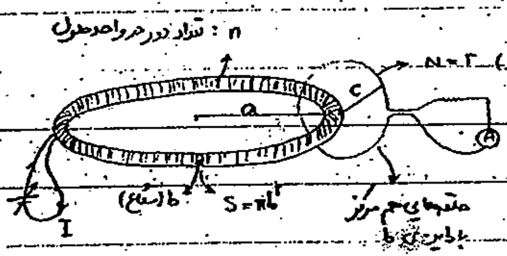
$\Rightarrow \varepsilon' = -\frac{d\varphi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(Blx) = -Bl\frac{dx}{dt}$

چون $\frac{dx}{dt} < 0$ است ← $-\frac{dx}{dt} = v$: تندی مستطیل

$\Rightarrow \varepsilon' = Blv$

اگر مقاومت میله ها R باشد : $I' = \frac{Blv}{R}$ و جهت I' صدق قانون لنز را تعیین می کند (برای این مسئله)

مثال) در شکل روبرو اگر $I = I_0(1 - \frac{t}{1000})$ و $a \gg b$: آمپرمتر به ازای $0 < t < \frac{...}{sec}$ چه عددی را نشان می دهد ؟



یک حلقه $\varphi_{B_1} = B\pi b^2 + 0 \rightarrow \varphi_{کل} = N\varphi_{B_1} = N\pi b^2(\mu_0 n I) = \mu_0 N \pi b^2 n I_0 (1 - \frac{t}{1000})$

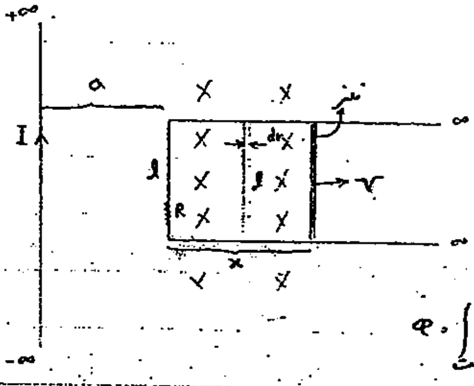
چون φ_B رو به کاهش است پس $\vec{B'}$ با $\vec{B}$ هم جهت می باشد . پس مثبت فرض شده جهت در محاسبه ی شار صحیح است .

$\cos 0 = \cos(0) = 1$

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

$\varepsilon' = -\frac{d\varphi_{B}}{dt} = \mu_0 \pi n N b^2 I_0 \times \frac{1}{100}$ نیروی محرکه القایی در مدار ثانویه

$I' = \frac{\varepsilon'}{R} = \frac{\mu_0 \pi n N b^2 I_0}{100\, R}\ (A)$ آمپر



مثال) در حلقه مقابل $I = I_0\left(1+\frac{t}{100}\right)$ ، مقدار I' را تعیین کنید؟

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

چون شار زیاد می‌شود $\vec B'$ در خلاف جهت $\vec B$ است

→ برونسو (پس ds برونسو)

$\varphi = \int_{\text{سطح حلقه}} \vec B\cdot d\vec s = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \times l\, dr\,(-1) = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\left(\ln(a+x) - \ln(a)\right)$

$\varepsilon' = -\frac{d\varphi_B}{dt} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\,\frac{d}{dt} I\left[\ln(a+x) - \ln(a)\right]$

$a = cte \xrightarrow{(1)} \frac{da}{dt} = 0$ ، $\frac{dx}{dt} \overset{(2)}{=} V \neq 0$ (سرعت میله)

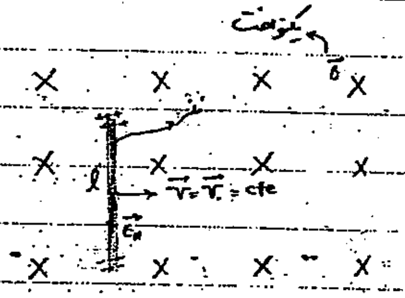
$(3)\quad \frac{dI}{dt} = I_0\,\frac{d}{dt}\left(1+\frac{t}{100}\right) = \frac{I_0}{100}$

$(1),(2),(3) \quad \varepsilon' = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\cdot\frac{I_0}{100}\left(\ln\frac{a+x}{a}\right) + \frac{\mu_0 l}{2\pi} I_0\left(1+\frac{t}{100}\right)\left(\frac{a}{V}\right)$

$\Rightarrow I' = \frac{\varepsilon'}{R} = \dots$

@jozve_iut

حرکت یک میله فلزی در میدان یکنواخت:



$\vec F_e = -e\vec V\times\vec B$

$\vec F = -e\vec E_H - e\vec V\times\vec B = -e(\vec E_H + \vec V\times\vec B) = 0$

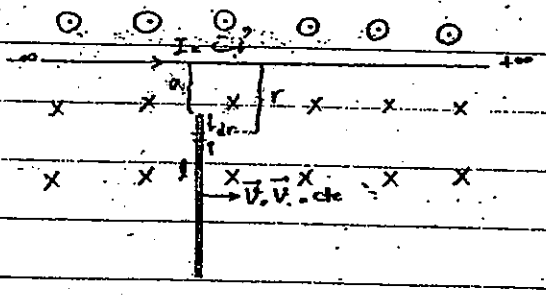
که وقتی الکترون‌ها در طول میله حرکت نکنند.

$\Rightarrow \vec E_H = -\vec V\times\vec B \longrightarrow E_H = VB\sin 90 = VB$

$\varepsilon' = \int_0^l \vec E_H\cdot d\vec l = \int_0^l VB\, dl \times 1 \longrightarrow \varepsilon' = VBl$ ، ε' جز فاراد

که جزء کوچکی از طول میله در جهت E_H — مربوط به یکنواخت

حرکت یک میله فلزی در میدان غیر یکنواخت:



برای طول dr که جزء کوچکی از طول میله است داریم:

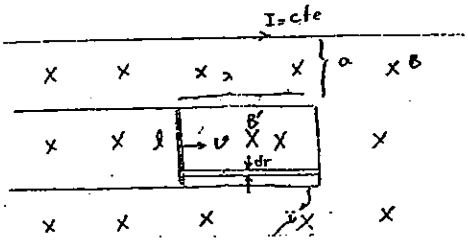
$d\varepsilon' = VB_H\, dr = V\,\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\, dr$

$\varepsilon' = \int_{r=a}^{r=a+l} d\varepsilon' = \frac{\mu_0 I V}{2\pi}\int_a^{a+l}\frac{dr}{r} \Rightarrow \varepsilon' = \frac{\mu_0 I V}{2\pi}\ln\left(\frac{a+l}{a}\right)$

میله عمود بر سیم است و به موازات سیم حرکت می‌کند.

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

مسأله‌ی قبل را با فرض یک مدار بسته به صورت زیر هم می‌توان حل کرد:



در شکل ارائه شده، چون x کوچک می‌شود شار سطح xl کم می‌شود. پس $\vec{B'}$ با $\vec{B}$ هم جهت است. بنابراین $\vec{ds}$ هم جهت با $\vec{B}$ خواهد بود.

شار یک حلقه $\varphi_B = \int_a^{a+l} \vec{B}\cdot \vec{ds} = \int_a^{a+l} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(x\,dr)\times 1$

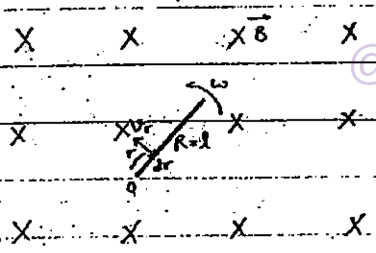
$$\to \varphi_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} x \ln\left(\frac{a+l}{a}\right) \to \varepsilon' = -\frac{d\varphi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{dx}{dt}\right)\ln\left(\frac{a+l}{a}\right)$$

چون x کاهش می‌یابد: $v = -\frac{dx}{dt} > 0$

$$\Rightarrow \varepsilon' = \frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\left(\frac{a+l}{a}\right)$$

مثال) میله‌ی رسانایی به طول l عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ با سرعت زاویه‌ای ω حول یک طرف خود در حال دوران است. نیروی محرکه‌ی دو سر آن را پیدا کنید؟

روش ۱:



نقطه‌ی O ثابت است و میله بر صفحه‌ی عمود بر میدان در حال دوران است.

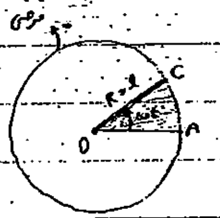
تندی dr: $v_r = r\omega$

و چون $d\varepsilon' = v_r B\, dr$: $d\varepsilon' = r\omega B\, dr$

در رابطه B یکنواخت، $\varepsilon' = \int_{r=0}^{r=l} d\varepsilon' = B\omega\int_0^l r\, dr = \frac{1}{2}B\omega l^2$

چون این متغیرها با تغییر r تغییر نمی‌کنند از انتگرال خارج می‌شوند.

روش ۲: با روش فارادی باید یک مدار بسته فرضی در نظر بگیریم:



$\omega =$ ثابت

در $t=0$ میله روی شعاع سمت راست منطبق بوده است.

چون با گذشت زمان سطح $S = \frac{1}{2}R^2\theta = \frac{1}{2}R^2\omega t$ زیاد می‌شود،

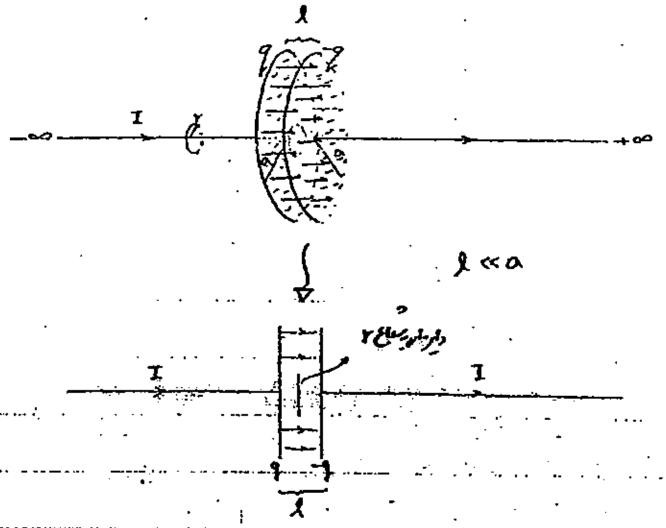
پس شار رو به افزایش است، پس $\vec{B'}$ در خلاف جهت $\vec{B}$ است (قانون لنز)

$$\varphi_B = \int \vec{B}\cdot\vec{ds} = \int_{سطح} B\, ds \cos(180) \Rightarrow \varphi_B = -B\int_s ds = -B\times\frac{1}{2}R^2\omega t$$

رابطه‌ی بالا: $\varepsilon' = -\frac{d\varphi_B}{dt} = \frac{1}{2}BR^2\omega = \frac{1}{2}Bl^2\omega$ (اگر $R=l$ است)

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

میدان مغناطیسی حاصل از تغییر شار الکتریکی :



شکل روبه‌رو نشان دهنده‌ی یک خازن مسطح دایره‌ای شکل در حال شارژ (یعنی q رو به افزایش) است.

در اطراف سیم : $\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\frac{q}{\pi a^2}}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{q}{\pi a^2 \varepsilon_0}$$

پس E رو به افزایش است. برای دایره‌ی کوچک فرضی آمپر:

$\Phi_E = \pi r^2 E \;:\; r \le a$ برای $\rightarrow \Phi_{E \text{ (کل سطح دایره)}} = \pi a^2 E \rightarrow \Phi_E = \pi a^2 \times \frac{q}{\pi a^2 \varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

از دو طرف dt می‌گیریم :

$I_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_{E\,(\pi a^2 \text{ سطح})}}{dt} = I$. جریان (فرضی موجود بین دو صفحه‌ی خازن) در موقع شارژ

لذا برای منحنی‌های آمپری که بین دو صفحه‌ی خازن رسم می‌شوند، می‌نویسیم :

« رابطه‌ی آمپر - ماکسول » : $\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I_d = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

که برای سطح πa^2 خواهیم داشت (دایره به شعاع a) :

$B \times 2\pi a = \mu_0 I$

برای $r<a$ داریم :

$\oint \vec{B_r}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\pi r^2 \times \left(\frac{q}{\pi a^2 \varepsilon_0}\right)\right)$ ← E

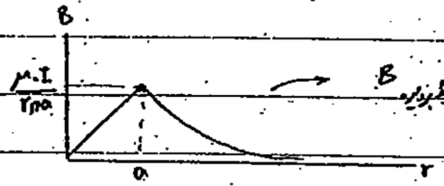
$\rightarrow B_r \times 2\pi r = \mu_0 \frac{r^2}{a^2}\frac{dq}{dt} \rightarrow B_{\text{داخل}\; r<a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r$

($r\to a$ میل کند نتیجه را می‌دهد)

برای $r>a$ داریم :

$\oint \vec{B}_{\text{خارج}}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\pi a^2 \times \frac{q}{\pi a^2 \varepsilon_0} + 0\right)$

$\rightarrow B \times 2\pi r = \mu_0 I \rightarrow B_{r>a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$



$\rightarrow B_{\text{محیط دایره}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$

مشابه این مسئله برای $\vec{E}'$ (میدان الکتریکی القایی) هم داریم :

$\mathcal{E}' = -\frac{d\Phi_{B\,\text{کل}}}{dt}$ ①

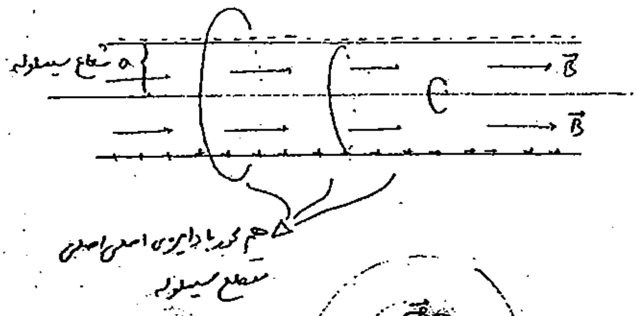
رابطه‌ی فاراد : $\mathcal{E}' = \int_a^b \vec{E}\cdot\vec{dl}$ ②

$\rightarrow \mathcal{E}' = -\frac{d\Phi_{B\,\text{کل}}}{dt} \Rightarrow \oint_{\text{مسیر بسته}} \vec{E}'\cdot\vec{dl} = -\frac{d\Phi_{B\,\text{کل}}}{dt}$

شار داخل سطح بسته مدار

@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

توجه: اگر شکل‌ها تقارن دایره‌ای داشته باشند، می‌توان $\vec{E'}$ را از رابطه‌ی مربوطه پیدا کرد.

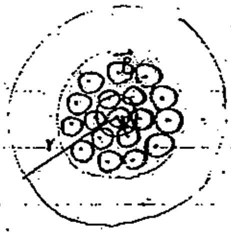


سیملوله‌ی ایده‌آل

برای I های رو به افزایش:

$$\oint_{r<a} \vec{E'}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\left(\pi r^2 \times \mu_0 n I \cos(\pi)\right)$$

زاویه‌ی بین $\vec{B'}$ و $\vec{B}$ (برای I های رو به افزایش)



$\vec{E'}$ به دلیل تقارن مماس بر دایره‌اند:

$$\to E' \times 2\pi r = \pi\mu_0 n r^2 \frac{dI}{dt}$$

$B=\mu_0 n I$ یکنواخت

$$\Rightarrow E'_{r<a} = \left(\frac{\mu_0 n}{2}\frac{dI}{dt}\right) r$$

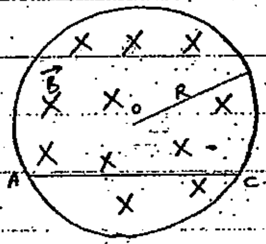
و برای $r>a$ داریم:

$$\oint_{r>a} \vec{E'}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\left(\pi a^2(\mu_0 n I)\cos 180 + 0\right)$$

در خارج B صفر است.

$$E'_{r>a} \times 2\pi r = \mu_0 n \pi a^2 \frac{dI}{dt} \to E'_{r>a} = \left(\frac{\mu_0 n \pi a^2}{2\pi}\frac{dI}{dt}\right)\frac{1}{r} = \left(\frac{\mu_0 n a^2}{2}\frac{dI}{dt}\right)\times\frac{1}{r}$$

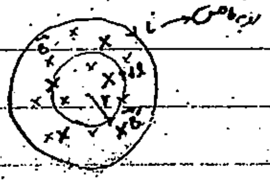
مثال: شکل روبه‌رو مقطع یک سیملوله ایده‌آل با $\vec{B}$ رو به کاهش را نشان می‌دهد. در صورتی که $\overline{AC} = l$ طول میله باشد، نیروی محرکه‌ی القائی دو سر میله ($\mathcal{E}'_{AC}$) چقدر خواهد بود؟



یادآوری: برای محاسبه‌ی $\vec{E'}$:

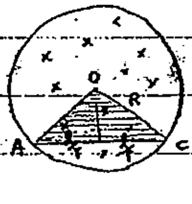
$$\oint \vec{E'}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\pi r^2 B(-1)\right)$$

مخالف جهت — ds در جهت $\vec{B'}$ که با $\vec{B}$ هم جهت است



$$\Rightarrow \oint E' dl(-1) = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} \to E'\times 2\pi r = \pi r^2 \frac{dB}{dt} \to E' = \left(\frac{1}{2}\left|\frac{dB}{dt}\right|\right) r$$

منفی است — مماس بر دایره‌ای به شعاع r



حل این مسئله: الف) با روش اول: مدار بسته‌ی مثلث OAC را در نظر بگیریم.

سطح مثلث: $S = \frac{1}{2}hl = \frac{1}{2}l\sqrt{R^2-(\frac{l}{2})^2}$

@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

شار در سطح مثلث : $\varphi_B = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS \rightarrow \varphi_B = \frac{1}{2} l \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}\, B$ (هم‌جهت)

$$\mathcal{E}' = -\frac{d\varphi_B}{dt} = -\frac{1}{2} l \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}\, \frac{dB}{dt} \rightarrow \mathcal{E}' = \frac{1}{2} l \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}} \left|\frac{dB}{dt}\right|$$

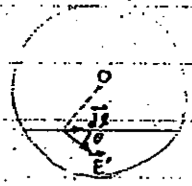
چون $\vec{E}'$ ها مماسی‌اند:

$$\int_o^A \vec{E}'\cdot\vec{dl} = \int_c^o \vec{E}'\cdot\vec{dl} = 0$$ (عمود)

پس : $\mathcal{E}' = \oint \vec{E}'\cdot\vec{dl} = \int_o^A 0 + \int_A^C \vec{E}'\cdot\vec{dl} + \int_c^o 0 \rightarrow \mathcal{E}' = 0 + \mathcal{E}'_{AC} + 0$

$$\rightarrow \mathcal{E}'_{AC} = \frac{1}{2} l \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}} \left|\frac{dB}{dt}\right|$$

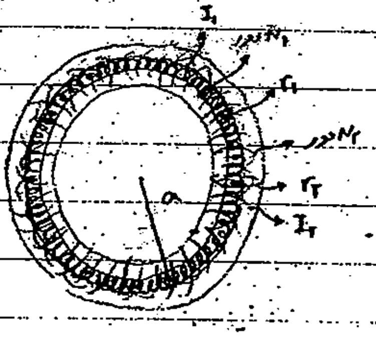
ب) محاسبه‌ی مستقیم از رابطه‌ی $\mathcal{E}'_{AC} = \int_{A}^{C} \vec{E}'\cdot\vec{dl}$



$$\mathcal{E}'_{AC} = \int_A^C E'\, dl \cos\theta = \int_A^C \frac{1}{2}\left|\frac{dB}{dt}\right| r \cos\theta\, dl = \frac{1}{2}\left|\frac{dB}{dt}\right| \int_A^C (\overbrace{r\cos\theta}^{h})\, dl$$

$$= \frac{1}{2} h \left|\frac{dB}{dt}\right| \int_A^C dl = \frac{1}{2} l h \left|\frac{dB}{dt}\right| = \frac{1}{2} l \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}} \left|\frac{dB}{dt}\right|$$

القای متقابل : دو مدار ترویک به هم هر کدام روی دیگری اثر القائی خواهد داشت. اثر ① روی ② سبب $\mathcal{E}_{12}$ و اثر ② روی ① باعث $\mathcal{E}_{21}$ خواهد شد. مثلاً برای دو توروئید که توروئید با شعاع کوچک (درون) شعاع بزرگ تر است:



$a \gg r_1, r_2$

در درون توروئید با شعاع r_1 : $B_1 = \mu_0 n_1 I_1 = \mu_0 \frac{N_1}{2\pi a} I_1$

$B_2 = \mu_0 n_2 I_2 = \mu_0 \frac{N_2}{2\pi a} I_2$

شار در حلقه N_1 : $\varphi_1 = N_1 (\pi r_1^2) B_2 (\pm 1)$ — B_2 رو به کاهش : + ، B_2 رو به افزایش : −

$$\Rightarrow \mathcal{E}'_1 = -\frac{d\varphi_1}{dt} \rightarrow \mathcal{E}'_1 = -\frac{d}{dt}\left(\pm N_1 \pi r_1^2 \times \frac{N_2}{2\pi a} I_2 \times \mu_0\right) = \mu_0 N_1 r_1^2 \frac{N_2}{2a} \left|\frac{dI}{dt}\right|$$

$$\rightarrow \mathcal{E}'_1 = M_{12} \left|\frac{dI}{dt}\right|$$

ضریب القای متقابل : $M_{12} = \dfrac{\mu_0 N_1 N_2 r_1^2}{2a}$

و برعکس:

میدان خارج تیوب کوچک (در داخل خودش) صفر است، B_1 خارج $= 0$

شار کل حلقه‌های توروئید r_2 : $\varphi_2 = N_2 (\pi r_1^2) B_1 (\pm 1)$

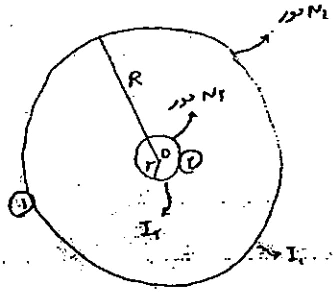
$$\rightarrow \mathcal{E}'_2 = M_{21} \left|\frac{dI}{dt}\right| \qquad M_{21} = \frac{\mu_0 N_2 N_1 r_1^2}{2a}$$

@jozve_iut
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

در هر مثال دیگری هم مانند این مثال: همواره $M_{21} = M_{12}$ (تجربه تأیید می‌کند)

← در درس الکترومغناطیس بصورت ریاضی این رابطه یعنی $M_{21} = M_{12}$ اثبات می‌شود.

مثال) حلقه‌ای بزرگ با حلقه‌ی بسیار کوچکی هم مرکزاند (در یک صفحه) ضریب القاء متقابل را پیدا کنید؟ $r \ll R$



$B_{o_1} = \frac{\mu_0 I_1}{2R} \times N_1 \simeq B_1$ میدان تقریباً ثابت درون دایره‌ی کوچک

$\varphi_2 = N_2(\pi r^2) B_1 \simeq N_2(\pi r^2) \times B_{o_1}$

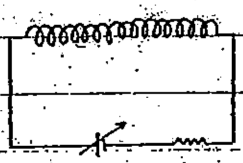
$\rightarrow \varphi_2 = N_2 \pi r^2 \times \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2R}$

$\Rightarrow \mathcal{E}_2 = -\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi r^2}{2R}\left|\frac{dI_1}{dt}\right|$ و $M_{12} = M_{21} = M \rightarrow \mathcal{E}_2 = M\left|\frac{dI_1}{dt}\right|$

$\Rightarrow M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi r^2}{2R}$ و $M_{21} = \frac{\varphi_2}{I_1}$, $M_{12} = \frac{\varphi_1}{I_2}$

خودالقایی: برای یک سیملوله یا یک القاگر فرض کنیم تعداد کل حلقه‌ها ۱۰۰ باشد. برای یک حلقه‌ی دلخواه مانند حلقه‌ی ۱۰، ۹۹ حلقه‌ی دیگر روی آن (یا هر حلقه‌ی دیگری) اثر القائی دارند. چون یک مدار داریم؛ این نوع القاء را خودالقایی می‌نامیم. می‌نویسیم:

@jozve_iut



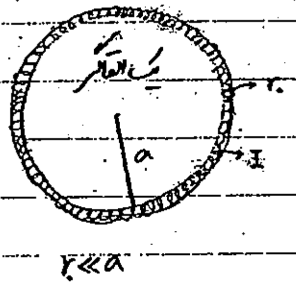
$\mathcal{E}$ (مثبت) = نیروی محرکه‌ی خودالقایی $= L\left|\frac{dI}{dt}\right|$

با فرض $\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}$ اگر $\frac{dI}{dt} > 0$ آنگاه $\mathcal{E} < 0$ ← با افزایش I مخالفت می‌کند

اگر $\frac{dI}{dt} < 0$ آنگاه $\mathcal{E} > 0$ ← با کاهش I (جریان) مخالفت می‌کند.

که با قانون لنز مطابقت دارد.

* برای توروئید با حلقه بسیار کوچک شعاع a بزرگ و حلقه‌های فشرده و زیاد (یعنی N بسیار بزرگ) ضریب خودالقایی را بیابید؟



$N-1 \simeq N$ (بدلیل اینکه N بزرگ)

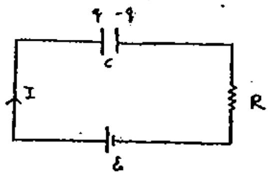
$\varphi_{\text{یک حلقه}} = \pi r^2 B = \pi r^2(\mu_0 n I) = \pi r^2 \mu_0 \frac{N}{2\pi a} I$

$\varphi_{\text{کل}} = N\varphi_{\text{یک حلقه}} = \frac{\mu_0 r^2 N^2}{2a} I$, $\varphi_{\text{کل}} = LI \rightarrow L = \frac{\varphi_{\text{کل}}}{I}$

$L = \frac{\mu_0 r^2 N^2}{2a}$

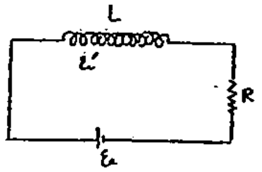
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

* یادآوری: رابطه‌ی انرژی برای خازن:



$$\mathcal{E}I = V_C I + RI^2 \quad (1)$$

* حال برای یک سیملوله در مدار:



رابطه‌ی انرژی: $P_{\mathcal{E}} + P_{\mathcal{E}'} = RI^2$

$$\mathcal{E}I + \mathcal{E}'I = RI^2$$

$$\to \mathcal{E}I = -\mathcal{E}'I + RI^2$$

چون: $-\mathcal{E}' = L\frac{dI}{dt}$

$$\mathcal{E}I = (L\frac{dI}{dt}) + RI^2$$

اگر $V_L = L\frac{dI}{dt}$ ولتاژ دو سر القاگر باشد:

$$\mathcal{E}I = V_L I + RI^2 \quad (2)$$

همان طور که مشاهده می‌شود رابطه‌ی (1) و (2) شبیه هم‌اند.

U_L: انرژی القاگر $\qquad \frac{dU_L}{dt} = LI\frac{dI}{dt} \longleftarrow V_L I = (L\frac{dI}{dt})I$ = توان القاگر

که در این صورت پس از تابع اولیه گرفتن از رابطه‌ی $dU_L = LI\,dI$ خواهیم داشت $U_L = \frac{1}{2}LI^2$

اگر B یکنواخت باشد: $u_B = \frac{U_L}{\text{حجم القاگر}}$: انرژی واحد حجم مغناطیسی

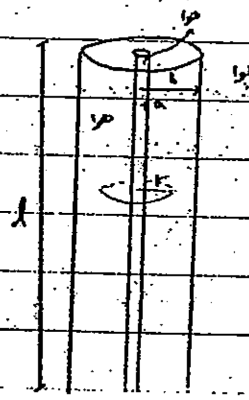
برای توروئید در مسئله‌ی قبل دیدیم که: $L = \frac{\mu_0 N^2 r^2}{2a}$ ، بنابراین

انرژی واحد حجم داخل توروئید ایده‌آل:

$$u_B = \frac{\frac{1}{2}\times(\frac{\mu_0 N^2 r^2}{2a})I^2}{\pi r^2 \times 2\pi a} \to u_B = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{8\pi^2 a^2} = \frac{1}{2\mu_0}(\mu_0 \frac{N}{2\pi a} I)^2 = \frac{1}{2\mu_0}(\mu_0 n I)^2$$

$\Rightarrow u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$ نظیر رابطه‌ی $u_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ می‌باشد.

یک سیم هم محور از خودش خاصیت خودالقایی نشان می‌دهد.



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow B \times 2\pi r = \mu_0 I \to B_{a<r<b} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

و در سایر نقاط صفر

انرژی واحد حجم بین b و a: $u_B = \frac{1}{2\mu_0}\times(\frac{\mu_0 I}{2\pi r})^2 \to u_B = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$

$$U_L = \int_a^b u_B\, dV = \int_a^b \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}\times \underbrace{2\pi r l \times dr}_{\text{جانبی}} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\int_a^b \frac{dr}{r}$$

(انرژی واحد حجم)

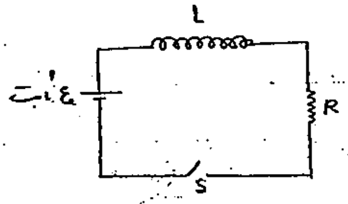
@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

$$\rightarrow u_L = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln(b/a)$$

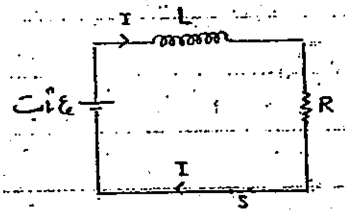
چون برای هر القاگری : $u_L = \frac{1}{2} L I^2$

$$L_{\text{کابل هم محور}} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln(b/a)$$

* مدار L-R :



اگر آمپرمتر در این مدار باشد وقتی کلید وصل می‌شود، در لحظه‌ی اول آمپرمتر صفر را نشان می‌دهد ولی بعد به مرور زیاد می‌گردد تا به $I_{max} = \frac{\varepsilon}{R}$ برسد.



← در $t=0$ کلید S متصل می‌شود. t ثانیه بعد :

$$\varepsilon I = V_L I + R I^2 \rightarrow \varepsilon = L \frac{dI}{dt} + R I$$

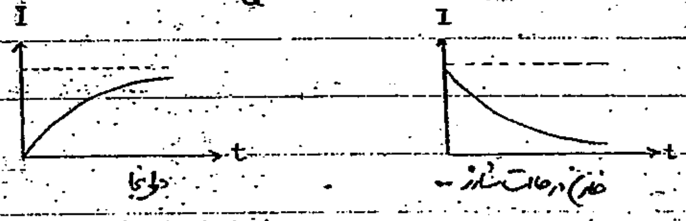
$$\rightarrow \varepsilon - RI = L \frac{dI}{dt} \rightarrow dt = L \frac{dI}{\varepsilon - RI}$$

$$\Rightarrow -\frac{R}{L} dt = \frac{-R\, dI}{\varepsilon - RI} \Rightarrow \text{انتگرال می‌گیریم} : -\frac{R}{L} \int_0^t dt = \int_0^I \frac{-R\, dI}{\varepsilon - RI}$$

تغییر متغیر

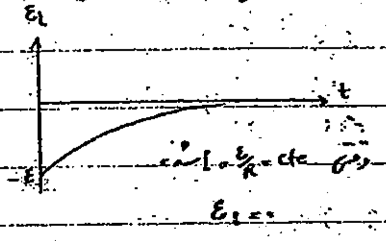
$$\Rightarrow -\frac{R}{L} t = \ln(\varepsilon - RI) \Big|_0^I = \ln(\varepsilon - RI) - \ln(\varepsilon) = \ln\left(\frac{\varepsilon - RI}{\varepsilon}\right)$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{Rt}{L}} = \frac{\varepsilon - RI}{\varepsilon} \rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right)$$



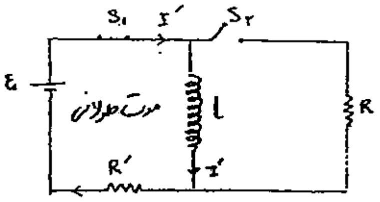
برای حالتی که القاگر انرژی نپذیرفته است. $I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right)$

نیروی محرکه خود القایی القاگر $\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{\varepsilon}{R}\left(0 - \left(-\frac{R}{L}\right) e^{-\frac{R}{L} t}\right) \rightarrow \varepsilon_L = -\varepsilon e^{-\frac{R}{L} t}$ (مخالفت با تغییر)



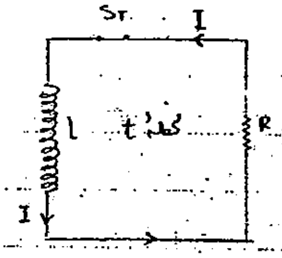
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

* حالتی که القاگر انرژی دهنده است:



ابتدا S_1 را برای مدت نسبتاً طولانی وصل می‌کنیم تا $I' = \frac{\varepsilon}{R'} = cte$ شود و $U_L = \frac{1}{2} L \left(\frac{\varepsilon}{R'}\right)^2$ کل

اکنون ابتدا S_2 را وصل و پس بلافاصله S_1 را قطع می‌کنیم تا I_0 مربوط به مدار سمت راست است. حال $I' = \frac{\varepsilon}{R}$ مدار سمت چپ شود.



رابطه‌ی پایستگی انرژی:

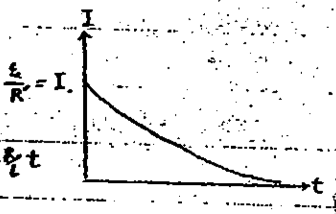
$$P_\varepsilon = P_L + P_R$$

(باتری ندارد)

$$0 = V_L I + RI^2 \longrightarrow \left(L\frac{dI}{dt}\right)I + RI^2 = 0$$

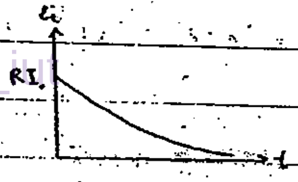
$$L\frac{dI}{dt} = -RI \Rightarrow \int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt$$

$$\longrightarrow \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\frac{R}{L}t \longrightarrow \frac{I}{I_0} = e^{-\frac{R}{L}t} \longrightarrow \boxed{I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}}$$



$$\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt} \longrightarrow \varepsilon_L = -I_0 L \frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{R}{L}t}\right) \longrightarrow \varepsilon_L = -I_0 L\left(-\frac{R}{L}\right)e^{-\frac{R}{L}t}$$

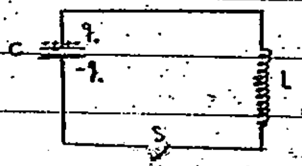
$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_L = RI_0 e^{-\frac{R}{L}t}}$$ مربوط به انرژی دهنده



ثابت زمانی مدت زمانی است که ε_L از ε_{L_0} به $\frac{\varepsilon_{L_0}}{e}$ برسد. τ

$$\frac{\varepsilon_{L_0}}{e} = \frac{\varepsilon_{L_0}}{e^{\frac{R\tau}{L}}} \longrightarrow \frac{R\tau}{L} = 1 \Rightarrow \tau = \frac{L}{R}$$ (ثابت زمانی مدار R-L)

نمایش ارتعاشات الکترومغناطیسی (مدار L-C)

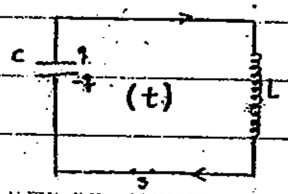


در حالت قطع S چون $I = 0$ است، $U_L = 0$ ولی $U_C = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}$ می‌باشد. در $t = 0$ کلید را وصل می‌کنیم.

باتری ندارد: $P_\varepsilon = P_L + P_C \longrightarrow 0 = \left(L\frac{dI}{dt}\right)I + \frac{q}{C}I$

$$\longrightarrow L\frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right) + \frac{q}{C} = 0 \longrightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

که شبیه رابطه‌ی $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ است که $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$



و جواب $q = q_0 \cos\omega t$ در آن صدق می‌کند.

که در آن q در زمان $t = 0$ برابر q_0 باشد.

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_0 \sin\omega t$, $-\omega q_0 = I_0$ $\rightarrow$ $I = I_0 \sin\omega t$

انرژی خازن در لحظه t : $u_c = \frac{1}{2}\frac{q^2}{c} = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{c}\cos^2\omega t$

انرژی القاگر در لحظه t : $u_L = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L(-\omega q_0)^2 \sin^2\omega t \rightarrow u_L = \frac{1}{2} L\omega^2 q_0^2 \sin^2\omega t$

$\rightarrow u_L = \frac{1}{2} L\left(\frac{1}{LC}\right) q_0^2 \sin^2\omega t \rightarrow u_L = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{c}\sin^2\omega t$

بنابراین : $u_L + u_c = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{c}$ = انرژی اولیه خازن

چون سیم ها مقاومت ندارند جواب: باید انرژی در این مدار پایسته باشد.

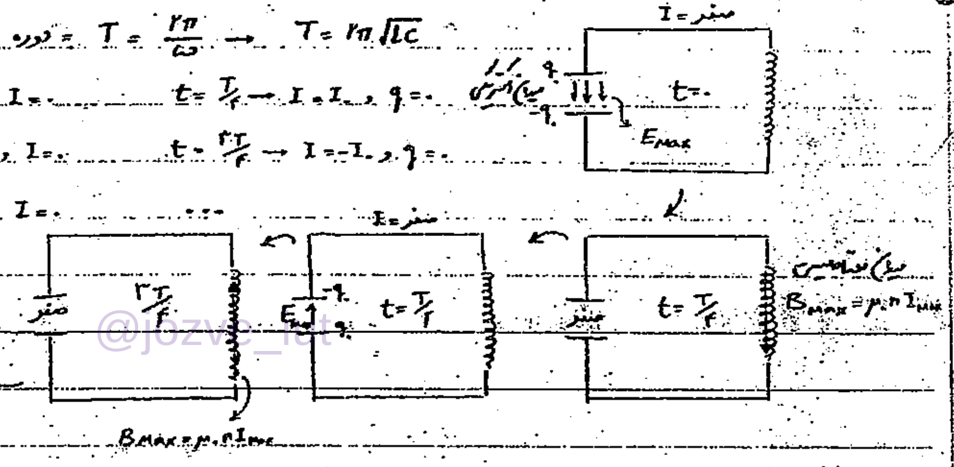
پریود = دوره = $T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{LC}$

$t=0 \rightarrow q=q_0$ و $I=0$ ، $t=\frac{T}{4} \rightarrow I=I_0$ و $q=0$

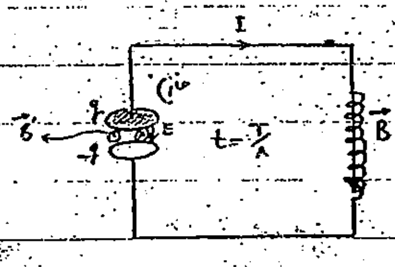
$t=\frac{2T}{4} \rightarrow q=-q_0$ و $I=0$ ، $t=\frac{3T}{4} \rightarrow I=-I_0$ و $q=0$

$t=T \rightarrow q=q_0$ و $I=0$ ...

تکرار شد



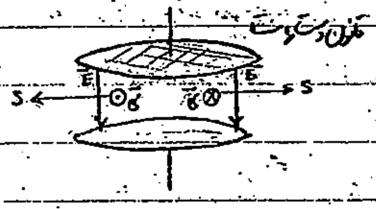
در $t=\frac{T}{8}$: $\sin^2(\omega\frac{T}{8}) = \cos^2(\omega\frac{T}{8})$. در این لحظه نصف انرژی اولیه در خازن و نصف دیگر در القاگر خواهد بود.



$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

$\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$ بردار پوینتینگ

جهت $\vec{S}$، جهت انتقال انرژی را مشخص می کند.



توجه: وقتی خازن در حال تخلیه است $\vec{S}$ به سمت بیرون و وقتی در حالت شارژ است، $\vec{S}$ به سمت داخل خواهد بود.

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

سطح در دو دایره‌ای هم ۲

* معادلات ماکسول :

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} \overset{①}{=} \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int \rho\, dr$ و (قانون گوس در مغناطیس) $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} \overset{②}{=} 0$ زیرا ما دو قطبی مغناطیسی جدا نداریم

$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l} \overset{③}{=} -\frac{d\varphi_B}{dt}$ ← برآیند هر دو میدان

$\oint_c \vec{E}_e\cdot d\vec{l} = 0$ در میدان الکتریکی

$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\varphi}{dt}$ در میدان مغناطیسی

آمپر : $\oint \vec{B}_I\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ (القایی) و ماکسول : $\oint \vec{B}'\cdot d\vec{l} = \mu_0\epsilon_0\frac{d\varphi_E}{dt}$

برآیند کل $\vec{B}$ ها ← $\vec{B} = \vec{B}_I + \vec{B}' \Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} \overset{④}{=} \mu_0\left(I + \epsilon_0\frac{d\varphi_E}{dt}\right)$

که $\epsilon_0\frac{d\varphi_E}{dt} = I_d$: جریان جابجایی

* در خلأ بار نیست : $q = 0$ و $\varphi = 0$ و $I = 0$ بنابراین :

$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$, $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$, $\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l} = -d(\vec{B}\cdot\vec{S})$, $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{c^2}\frac{d\varphi_E}{dt}$

@jozve_iut

می‌دانیم : $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi\times 9\times 10^9}$ و $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \to \mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}$

$\mu_0\epsilon_0 = 4\pi\times 10^{-7}\times(4\pi\times 9\times 10^9)^{-1} = \frac{1}{(3\times 10^8)^2} \to \mu_0\epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

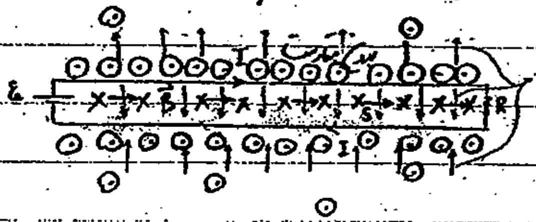
$\vec{E}$ و $\vec{B}$ های هم زمان در معادلات ماکسول در خلأ :

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$, $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$, $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}(\vec{B}\cdot\vec{S})$, $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(\vec{E}\cdot\vec{S})$

۱- عمود بر هم هستند ($\vec{B}$ و $\vec{E}$)

۲- چگالی انرژی آن‌ها مساوی هستند که همواره $u_E = u_B$ است. یعنی :

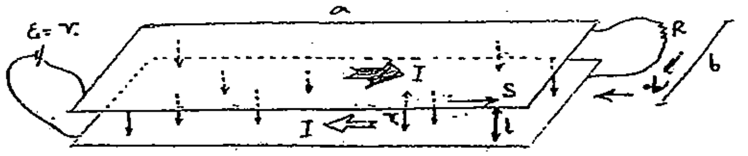
$\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2\mu_0}B^2 \to B = \sqrt{\mu_0\epsilon_0}\,E \to B = \frac{E}{c}$ (B کمتر ، E بزرگتر)



می‌دانیم : $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$ ، انرژی از باتری به طرف مقاومت می‌رود جهت S هم چنان از چپ به راست است.

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

* اگر I یکنواخت در عرض نوار توزیع شده باشد



جریان عرضی : $j = \frac{I}{b}$

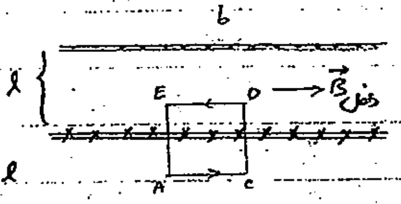
$a \gg l$, $b \gg l$

دو نوار فلزی فوق را کاملاً بدون مقاومت فرض کنید (ایده آل)

$P_\varepsilon = P_R \rightarrow \varepsilon I = RI^2$

میدان یکنواخت $El = V_0 \rightarrow E = \frac{V_0}{l}$

← با نگاه از راست به طرف چپ (شکل مقابل):



$b \gg l$

$B_{\text{خارج}} = 0$

$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = -\mu_0 \frac{I}{b} AC \rightarrow B\,AC(-1) = -\mu_0 \frac{I}{b} AC$

$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{b}$ و $I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{V_0}{R} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 V_0}{bR}$ ($\vec{B}$ و $\vec{E}$ عمودند)

بنابراین : $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} \Rightarrow S = \frac{1}{\mu_0}EB\sin\alpha = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{V_0}{l}\right)\left(\frac{\mu_0 V_0}{bR}\right) = \frac{V_0^2/R}{lb} = \frac{P_R}{lb}$

S = (توان) × (سطحی که انرژی از درون آن حرکت می‌کند $)^{-1}$ ⇒ کل انرژی عبوری از سطح = Slb = توان = P_R

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

@jove_iut

www.jozve-iut.ir

@jozve_iut

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان